

FOLGE, 1953, BAND 12, HEFT 4-6

UNIVERSITY
OF MICHIGAN

SEP 16 1953

PHYSICS
LIBRARY

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude,
W. Wien, M. Planck, E. Grüneisen

Der ganzen Reihe 447. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN, F. HUND, W. KOSSEL,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,
R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN
Heidelberg

F. MÖGLICH
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionssechluß am 2. Juli 1953

Inhalt

G. C. Mönch, Halle (Saale): Thermospannung Tellur—Metall. (Untersuchungen über die Eignung der Tellur—Metall-Zusammenstellungen als Thermoelement geringer Trägheit.) (Mit 13 Abbildungen)	161
Th. Mohr, Halle (Saale): Thermospannung Tellur—Silber. (Untersuchungen über die Besonderheiten des Tellur—Silber-Thermoelementes.) (Mit 5 Abbildungen)	171
G. C. Mönch, G. Wichert und O. Böttger, Halle (Saale): Experimentelle Untersuchungen am Wismutbolometer und theoretische Auslegungen der Ergebnisse. (Mit 52 Abbildungen)	183
G. Wendel, Berlin: Nachweis der Elektrolumineszenz mit Hilfe von Mehrschichten-Farbfilm. (Mit 3 Abbildungen und 1 mehrfarbigen Tafel)	221
J. Meixner, Aachen: Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und verwandte Probleme	237
A. Eckardt, O. Lindig und K. Nitzsche, Jena: Zur Homogenisierung von Ultraschallfeldern in Wasser. (Mit 7 Abbildungen)	287
W. Glaser und P. Schiske, Wien und Berlin: Elektronenoptische Abbildung auf Grund der Wellenmechanik. I. (Mit 6 Abbildungen)	240
W. Glaser und P. Schiske, Wien und Berlin: Elektronenoptische Abbildungen auf Grund der Wellenmechanik. II. (Mit 2 Abbildungen)	287
G. Blankenburg und G. Schubart, Halle (Saale): Über die Halbleitereigenschaften des Kupferoxyduls. VI. Die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit bei Temperaturen zwischen $+20^{\circ}\text{C}$ und -190°C . (Mit 10 Abbildungen)	281
H. Nieke, Halle (Saale): Über die Halbleitereigenschaften des Kupferoxyduls. VII. Der Halleffekt unterhalb der Zimmertemperatur. (Mit 16 Abbildungen)	297
A. Papapetrou, Berlin: Eine rotationsymmetrische Lösung in der allgemeinen Relativitätstheorie	300
S. Parthasarathy and A. F. Chhappgar, New Delhi (India): Viscosity as a Factor in the Anomalous Absorption of Ultrasonic Waves in Liquids. (With 8 figures)	319

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Prof. Dr. F. Möglich, (1) Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74, oder an Herrn Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die Zeichnungen sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den Zitaten wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34.— (U. S. \$ 8.16) zuzügl. Postgebühren. Einzelpreis dieses Heftes DM 15.60 (U. S. \$ 3.75).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

ren
no-
... 101
ber
en)
lle
ter
... 103
ar-
... 223
ter
... 227
on
... 237
ng
... 240
il-
... 267
r-
er
C.
... 281
s.
n) 297
en
... 300
s
s.
... 310

vorher
me das
tigung,
Sonder-
abzüge

Linden-
straße 7,

Korrek-
n sind

a Ver-
llt ist.
werden.
mittel-
uzügl.

landes

U

(

fa
B
S
re
E

J
V
a
m
S
w
hi
un
B
G
E

fin
st
w
hi

St
no

Thermospannung Tellur—Metall

(Untersuchungen über die Eignung der Tellur—Metall-Zusammenstellungen als Thermoelement geringer Trägheit)¹⁾

Von G. C. Mönch

(Mit 13 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die Ergebnisse der Messungen, (Empfindlichkeit, Zeitkonstante, Vakuumfaktor) an Thermoelementen der Bauart Ag/Te/Ag, Cu/Te/Cu, Bi/Te/Bi (auch Bi/Sb/Bi) und Ag/(Te + Ag)/Ag, Bi/(Te + Bi)/Bi, Sb/(Te + Sb)/Sb, Bi/(Te + Sb)/Bi, Sb/(Te + Bi)/Sb werden mitgeteilt. Als besondere Erscheinungen treten die störende Diffusion des Silbers in das Tellur und die Umkehrung des Vorzeichens am Element Ag/(Te + Ag)/Ag auf.

A. Fragestellung

Die Untersuchungen, über die nachfolgend berichtet wird, liegen fast zehn Jahre (1943—1944) zurück und beschäftigen sich mit Thermoelementen, die durch Verdampfen von zwei verschiedenen Metallen im Hochvakuum und Kondensation auf eine dünne Zelluloidfolie hergestellt waren. Außer den üblichen Thermoelementen mit Antimon und Wismut wurde besonders das Element Silber/Tellur/Silber bzw. Silber/Tellur + Silber (Silbertellurid ?)/Silber untersucht. Die Verwendung von Tellur führte zur Beobachtung der Diffusion von Silber in das Tellur hinein, an die sich eingehendere Untersuchungen dieser Erscheinung anschlossen und über deren Ergebnisse weitere Mitteilungen in Vorbereitung sind. Für den Bau von Thermoelementen hat der Verlauf des Diffusionsvorganges und dessen Gesetzmäßigkeit nur insofern Bedeutung, als es notwendig ist, die Zerstörung des Elementes durch diese Erscheinung zu verhindern.

Die nachfolgenden Ausführungen bringen einen Beitrag zur Größe der Empfindlichkeit und Trägheit von Thermoelementen insbesondere der Zusammenstellung Ag/(Ag + Te)/Ag. Die Ergebnisse werden erst jetzt veröffentlicht, nachdem weitere Untersuchungen Klarheit über einige eigenartige Beobachtungen gebracht haben.

B. Versuchsanordnungen

I. Widerstandsmessung

Die Widerstandsbestimmung der Thermoelemente darf wegen der geringen Stärke der aufgedampften Metallschichten nur bei kleinen Stromstärken vorgenommen werden. Diese Forderung ist um so notwendiger, als die Messung des

¹⁾ 1. Mitteilung über Strahlungsempfänger.

Widerstandes schon bei der Entstehung der Schichten erfolgt und ein Einfluß des Stromes auf die Strukturbildung der kondensierenden Schicht vermieden werden muß.

Die Schaltung der Widerstandsanordnung veranschaulicht Abb. 1. In dem Stromkreis mit Spannungsquelle und hohem Widerstand W liegt je nach Stellung der Wippe der unbekannte Widerstand

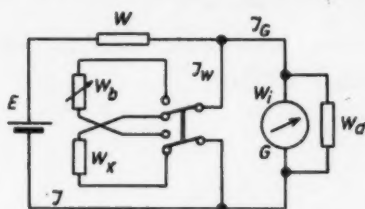


Abb. 1. Schaltung zur Widerstandsbestimmung. E Spannung des Akkumulators, J , J_w , J_G Stromstärken der einzelnen Kreise, w_b , w_x , w_i , w_d Widerstände, W großer Widerstand, G Galvanometer

Funktion von w_x wird. Der Ausschlag J_G läßt sich also unmittelbar auf Widerstände eichen, indem entweder der Vergleichswiderstand w_b geändert oder die Zugehörigkeit von Ausschlag und Widerstand berechnet wird. Durch die Eichkurve ist es möglich, gleich durch die Stellung des Lichtzeigers auf der Skala mit Widerstandseinteilung die Ohmwerte abzulesen.

Die hier angegebene Methode mißt die kleineren Widerstände genauer als die größeren, für sehr große wird sie unbrauchbar. Wenn sich hiermit die Widerstände auf einige Prozent ihres Wertes bestimmen lassen, ist das eine Anordnung, die gerade den vorliegenden Anforderungen genügt.

II. Anordnung zur Messung der Thermospannung

a) Optische Anordnung. Auf einer optischen Bank (Zeisschiene) standen hintereinander (Abb. 2) die elektrische Glühlampe G (Autolampe), die Blende I (Iris), die Sammellinse L ($f = 12,5$ cm), die auf einen Präzisionsverschiebereiter



Abb. 2. Optische Versuchsanordnung. G Glühlampe, J Irisblende, L Linse, B Blende, T Thermoelement

möglich. Im Falle der Bestrahlung mit einer Hefnerkerze stand allein die Blende B vor der Thermozelle.

b) Elektrische Anordnung. Die durch Bestrahlung entstandene Spannung wurde durch Kompensation nach der in Abb. 3 angegebenen Methode gemessen.

Es muß bei großer Empfindlichkeit des Galvanometers G der Strom J sehr klein, d. h. der Widerstand W sehr groß genommen werden. In dem vorliegenden Fall war $W = 10^6$ Ohm eine Größe, gegen die alle anderen im Stromkreis vorkommenden Widerstände, einschließlich der verschiedenen praktisch vorkommenden w_x , zu vernachlässigen sind. Dadurch ist praktisch $J = \text{konst.}$, wodurch J_G (wegen $w_b = \frac{w_i \cdot w_d}{w_i + w_d} = \text{konst.}$, $J = \text{konst.}$) nur noch eine

konst., $J = \text{konst.}$) nur noch eine

konst., $J = \text{konst.}$) nur noch eine

Für den Fall der Stromlosigkeit des Galvanometerzweiges ist für sehr großes W ($W = 4 \cdot 10^6$ Ohm, $E = 4$ Volt) die gesuchte Thermospannung E_x :

$$E_x = 10^{-6} w \text{ Volt.} \quad (1)$$

Zur Bestimmung der Spannung E_x genügte die Feststellung der Größe w des regelbaren Widerstandes für den Fall der Einstellung des Galvanometers G auf den Nullpunkt.

C. Zelle Bauart 1

I. Zellaufbau

a) Röhrenform. Die Versuchszelle bildete eine Glasglocke, in die auf einem besonderen Halter das Thermoelement eingesetzt wurde. Sie hatte die in Abb. 4 wiedergegebene Form und bestand aus einem Glasrohr, das an einem Ende aufgebörtelt und mit einem beschliffenen Rand, am anderen Ende mit zwei Einschlitzungen und einem Pumpstutzen versehen war. In die Öffnung wurde der unter C I b beschriebene Halter mit dem Thermoelement eingesetzt und die freien Drahtenden des Thermoelementes mit den eingeschmolzenen Drähten der Glasglocke verlötet. Den Verschluss der Röhre bildete eine Aluminiumblechscheibe mit einem 4 mm großen Loch, auf dem eine dünne Steinsalzplatte als Fenster mit Apiezonwachs aufgekittet war. Nach dem Aufsetzen der Verschlussplatte konnte das Rohr an die Pumpe gesetzt, evakuiert und abgeschmolzen werden.

b) Röhreneinsatz und Systemhalter. Der Einsatz bestand aus einem gebörtelten Glasrohr (Abb. 5b) mit beschliffener Stirnfläche. Um seine feste Lage im Inneren der Glasglocke (Abb. 4) zu gewährleisten, erhielt es zwei Schnecken-

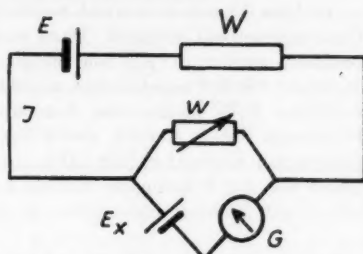


Abb. 3. Schaltung zur Bestimmung der Thermospannung. E Spannung des Akkumulators, E_x Thermospannung, J Strom, W großer Widerstand, w variabler Widerstand, G Galvanometer

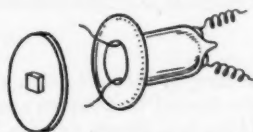


Abb. 4. Äußere Form der Versuchszelle

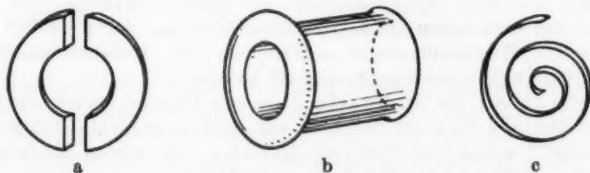


Abb. 5. Das Einsatzrohr, a) die aufgekitteten Elektroden, b) das Glasrohr mit Flansch, c) die Tombakfedern zum Rohr b.

federn aus schmalen Tombakstreifen, mit denen es in das Mantelrohr hineingedrückt wurde (Abb. 5c). Der beschliffene Flansch an dem einen Röhreneinde wurde dazu benutzt, die zwei Hälften einer kleinen durchgeschnittenen Unterlagscheibe aus Messing als Elektroden für das Element zu tragen (Abb. 5a). Sie

waren mit Apiezonwachs aufgekittet; angelötete Kupferdrähte stellten die elektrische Verbindung her.

c) Das Thermoelement wurde von den angekitteten Metallbacken (halbe Unterlagscheiben) getragen. Dazu mußte über die Elektroden eine Zelluloidhaut gespannt werden, die auf dem Metall gut haftete, wenn es vorher mit stark verdünntem Alkohol angefeuchtet worden war. Nach dem Trocknen der feucht gewordenen Folie mußte eine Zone am Außenrand der Metallscheiben von der Folienhaut befreit werden, damit das aufgedampfte Metall mit den Elektroden elektrischen Kontakt erhielt (Abb. 6a). Nach dieser Säuberung der Elektrodenränder von der Folienmasse wurden die für das Thermoelement bestimmten Metalle, durch Blenden abgeschirmt, in der beabsichtigten Gestalt im Vakuum auf-



Abb. 6. Das Thermoelement mit den Elektroden. a) Elektroden mit Folie (schraffierte Fläche), b) 1. Metallaufdampfung, c) 2. Metallaufdampfung, das Element ist damit hergestellt

gedampft. Es entstanden zwei stumpf-keilförmige Kreisringabschnitte (Abb. 6b), die durch Überdampfen von einem anderen Metall miteinander verbunden wurden (Abb. 6c). Damit war das Thermoelement mit zwei Lötstellen hergestellt.

Zur zusätzlichen Schwärzung des Thermoelementes wurde die ganze Fläche des Flansches mit Elektroden noch einmal mit einem dünnen Zelluloidhäutchen bedeckt, auf dem sich ein durch Aufdampfen im Vakuum bei vermindertem Druck hergestellter Wismut-Rußfleck von etwa 4 mm Durchmesser befand. Ab Element Nr. 24 fehlte diese zweite Trägerschicht mit dem Ruß. Stattdessen wurde das auf der Zelluloidfolie aufgedampfte Element (Abb. 6c) verkehrt herum, also mit der Metallschichtseite dem Halter zugewandt, vorsichtig auf die Elektroden gelegt und damit Metall (Element) auf Metall (Elektrode) zum Kontakt gebracht, so daß nach außen die Zelluloidoberfläche lag. Auf diese ließ sich nun unmittelbar die Wismutrußschicht aufdampfen. Die Konstruktionsdaten der später angeführten Thermoelemente enthält Tabelle 1.

Die Tabelle 2 gibt 1. die Nr. der Zelle, 2. die zum Element verwendeten Metalle, 3. die Widerstände, 4. die durch Belichten mit sichtbarem Licht (Glühlampe, willkürliche Einheit) entstandene Spannung der linken und rechten Lötstelle an, wie sie mit Galvanometer und der Schaltung nach Abb. 3 gemessen wurde.

d) Meßergebnisse mit dem Verstärker. Tabelle 3 enthält die mit dem Steuermformer nach Schwenkhagen²⁾ erhaltenen Ergebnisse. Es ist angegeben 1. die Nr. der Zelle, 2. der innere Widerstand, 3. der Anpassungsverlust, 4.—5. die Empfindlichkeit bei Bestrahlung mit sichtbarem Licht (Relativwerte), 6.—7. die Empfindlichkeit bei Bestrahlung mit ultrarotem Licht und 8. die Zeitkonstante.

²⁾ Siehe VDE-Fachberichte 1948, S. 134.

Tabelle 1
Konstruktionsdaten einiger Thermoelement-Zellen

Nr.	Metalle	Maße des Thermoelementstreifens [mm]		Stärke d. Zelluloid-träger-schicht-folie ³⁾ [mμ]	Größe d. Ruß-flecken in mm Durchm.	Trägerschicht-dicke (Zelluloid) für Ruß-fleck [mμ]	Dicke der Steinsalz-fenster mm	Druck im Gefäß ⁴⁾ [Torr]
		Länge	Breite					
2	Ag/Te/Ag	1,2	3	290	4	100	2,4	$5 \cdot 10^{-1}$
3	Ag/Te/Ag	1,4	2	220	4	110	2,3	$<10^{-4}$
4	Ag/Te/Ag	1,3	3	150	4	100	2,5	$5-8 \cdot 10^{-3}$
10	Cu/Te/Cu	1,2	1	100	5,8	120	1,7	$<10^{-4}$
17	Bi/Sb/Bi	1,5	1,5	120	4,5	150	1,0	$<10^{-4}$
24	Ag/Te/Ag	2	1,8	200	4	⁵⁾	0,7	$<10^{-4}$
29	Bi/Te/Bi	2	1,8	200	4		1,0	$<10^{-4}$

Tabelle 2
Thermospannungen verschiedener Zellen bei Bestrahlung mit Glühlampe (willkürliche Einheit)

Nr.	Metalle	Widerstand [Ohm]	Thermospannung in Volt
2	Ag/Te/Ag	115	linke Lötstelle 0 rechte Lötstelle $170 \cdot 10^{-6}$
3	Ag/Te/Ag	580	linke Lötstelle $38 \cdot 10^{-6}$ rechte Lötstelle $22 \cdot 10^{-6}$
4	Ag/Te/Ag	180	linke Lötstelle $200 \cdot 10^{-6}$ rechte Lötstelle $250 \cdot 10^{-6}$
10	Cu/Te/Cu	$3 \cdot 10^4$	linke Lötstelle $1000 \cdot 10^{-6}$ rechte Lötstelle $800 \cdot 10^{-6}$
17	Bi/Sb/Bi	160	linke Lötstelle $60 \cdot 10^{-6}$ rechte Lötstelle $80 \cdot 10^{-6}$
24	Ag/Te/Ag	510	linke Lötstelle $500 \cdot 10^{-6}$ rechte Lötstelle $500 \cdot 10^{-6}$
29	Bi/Te/Bi	$8 \cdot 10^4$	linke Lötstelle $800 \cdot 10^{-6}$ rechte Lötstelle 0

Unter Anpassungsverlust (Spalte 3) ist die Verminderung der Anzeige des Meßinstrumentes am Steuerumformer infolge schlechter Anpassung zu verstehen. Die Ergebnisse mit sichtbarem Licht wurden unter Benutzung einer 60-Watt-Glühlampe erhalten, die mit einem Hohlspiegel verkleinert abgebildet war. Die Werte in Spalte 4 sind die tatsächlich gemessenen, die in Spalte 5 die Maximalwerte, die das Instrument bei bester Anpassung anzeigen würde. Die Maximal-

³⁾ Über die Dickenbestimmung, vgl. G. C. Mönch, *Optik* 8, 550 (1951).

⁴⁾ Die Druckangabe 10^{-4} Torr ist ungewiß, da die bei einem Druck $<10^{-6}$ Torr abgeschmolzene Röhre mit aufge kitteten Fenstern versehen war. Über den Dampfdruck der verwendeten Kiste und damit über die Höhe des Vakuums in dem Versuchsrohr läßt sich nichts Genaues aussagen.

⁵⁾ Zelle 24 und 29 hatten eine andere Schwärzung erfahren, vgl. hierzu das Ende des Abschnittes C 1c.

werte errechneten sich unter Benutzung von berechneten und gemessenen Fehl-anpassungskurven. Als Strahler für ultrarotes Licht kam ein 60-Watt-LötKolben zur Anwendung, dessen Temperatur etwa 300° C betrug. Spalte 6 führt die gemessenen, Spalte 7 die Maximalwerte auf. Die Zeitkonstante ergab sich aus der e-Kurve, die als Oszillogramm bei plötzlicher Abblendung des Strahlers erhalten wurde.

Tabelle 3
Empfindlichkeit (Relativwerte) und Trägheit verschiedener Elemente, Meßergebnisse mit Steuerumformer

Nr.	Wdst. [Ohm]	Anp.- Verlust %	Empfindlichkeit				Zeitkonst. (27%)[msek]
			sichtb. Licht gem.	sichtb. Licht maximal	ultrarot. Licht gem.	ultrarot. Licht maximal	
1	2	3	4	5	6	7	8
2	115	20	14	18	6	7,5	80
3	580	60	1,9	4,8	—	—	32
4	180	35	9	14	3	4,5	70
17	160	25	1,4	1,9	0,3	0,4	—
24	510	56	21	60	10	29	130

c) Thermospannung pro Hefnerkerze. An der Zelle, die nach den Messungen mit dem Steuerumformer die größte Empfindlichkeit besaß, ergaben sich bei Bestrahlung mit 1 Hefnerkerze die in Tabelle 4 angegebenen Meßwerte; die

Tabelle 4
Empfindlichkeit der Zelle Nr. 24 bei Bestrahlung mit 1 Hefnerkerze

Abstand der Hefnerkerze in m	Verhältniszahlen des Quadrates der Abstände	Erzeugte Spannung in 10 ⁻⁶ Volt
0,2	1	28
0,4	4	7
1,0	25	1,1

Spannungen sind durch Kompensation unter Verwendung eines Galvanometers gemessen. Die hier angegebene Empfindlichkeit an dem Element 24 für eine bestimmte eingestrahelte Energie gestattet die Umrechnung der Ergebnisse in Tabelle 1 und 2 auf die Energieeinstrahlung durch eine Hefnerlampe.

III. Erfahrungen und Folgerungen

a) Veränderungen in den aufgedampften Schichten. Besonders an den Zellen Silber-Tellur-Silber war von Beginn ihrer Herstellung an die Änderung des inneren Widerstandes des Thermoelementes aufgefallen. Die Beobachtung ließ eine wesentliche Strukturveränderung vermuten. An einigen Zellen konnte eine Leitfähigkeitserhöhung beobachtet werden, die nicht mehr dem reinen Tellur zuzusprechen war. In anderen Fällen erhöhte sich der Widerstand des Elementes schließlich bis zu fast unendlich großen Werten. Praktisch war die Leitung unterbrochen. Diese beiden Beobachtungen, einmal die Widerstandsverringerung, das andere Mal die Widerstandserhöhung, konnte durch folgende Feststellung erklärt werden. Das Tellur geht mit dem Silber eine Verbindung ein, wobei Silber aus der aufgedampften Schicht weit in die aufgedampfte Tellurschicht hineindiffundiert. Mit zunehmendem Anteil an Silber steigt die Leitfähigkeit. Gleichzeitig tritt an den Grenzschichten Silber-Tellur eine derartige Silberverarmung auf, daß

schließlich die Silberschicht deutlich sichtbar immer dünner wird, bis zuletzt kein Stromdurchgang mehr feststellbar ist. Abb. 7 zeigt die Unterbrechungsstelle und den großen Diffusionsweg des Silbers, der sich durch Änderung der Durchsichtigkeit der Tellerschicht bemerkbar macht.

Diese Beobachtung erklärt, warum die erste Serie der hergestellten Elemente nach einiger Zeit entweder einen zu hohen oder einen sehr kleinen Widerstand aufwies, der in beiden Fällen dem spezifischen elektrischen Widerstand des reinen Tellurs widersprach. Bei den Elementen zu hoher Leitfähigkeit hatte das Tellur

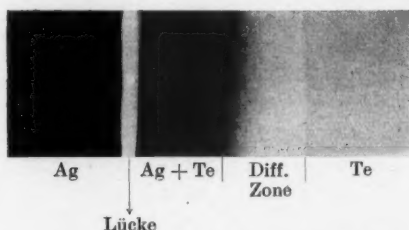


Abb. 7. Diffusion des Silbers in das Tellur auf Glasunterlage (vergrößert 1:7)

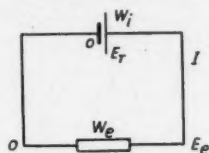


Abb. 8. Schaltungs-schema. E_T : Spannung des Thermoelements, w_i sein innerer Widerstand, I Stromstärke, w_e Widerstand des Meßinstrumentes

aus den anstoßenden Silberelektroden Silber aufgenommen, bei den hochohmigen Elementen war z. T. schon die Unterbrechung an der Übergangsstelle vom Tellur zum Silber durch Abwanderung des Silbers erfolgt.

b) Widerstand, Thermokraft und maximal abgebbare Leistung. Die bisherigen Ergebnisse liefern bereits ein bescheidenes Material für die Nachprüfung der maximal abgebbaren Leistung der Elemente. Hierzu können besonders die mit dem Steuerumformer erhaltenen Ergebnisse herangezogen werden. Ein an ein Meßinstrument (Galvanometer oder Verstärker) angeschlossenes Thermo-element gibt pro Zeiteinheit eine Energie an den Verstärker oder das Galvano-meter ab, die durch den Wattverbrauch aus Spannung und Widerstand des Elementes wie aus dem Widerstand des Meßinstrumentes zu berechnen ist. Diese Leistung L ist gleich^{*)}:

$$L_{w_i} = w_e = \frac{E_T^2}{4w_e} \quad (5)$$

^{*)} Die Leistung errechnet sich zu:

$$L = E_e \cdot I, \quad (2)$$

worin E_e die am Meßinstrument mit dem Widerstand w_e liegende Spannung und I den fließenden Strom bedeuten (vgl. Abb. 8). Es ist:

$$I = \frac{E_T}{w_i + w_e} = \frac{E_e}{w_e}, \quad (3)$$

wenn E_T die Spannung des Thermoelements und w_i seinen inneren Widerstand angibt und demnach:

$$L = \frac{E_e^2}{w_e} = \frac{E_T^2 w_e}{(w_i + w_e)^2}. \quad (4)$$

Für den Fall der besten Anpassung muß (wegen $dL/dw_e = 0$) $w_i = w_e = w$ sein, und somit geht (4) in (5) über.

Zum Vergleich des Wertes L , der unter Verwendung der gemessenen E_T - und w -Werte für verschiedene Elemente berechnet wird, mit den am Verstärker gefundenen, werden die Tabellen 1 und 2 herangezogen. Die maximal zu erwartende Leistung jedes Elementes berechnet sich aus der zuletzt angegebenen Formel für L , sofern E_T und w bekannt sind. Die mit den gleichen Elementen am Steuerumformer unter der Voraussetzung richtiger Anpassung zu erwartenden Ausschläge des Ausgangsmeßinstrumentes, also ebenfalls die Maximalwerte, sind in Tabelle 3 aufgeführt. Sie werden hier als Relativzahlen für die Leistung des eingangs am Steuerumformer angeschlossenen Elementes angesehen. Da es sich hierbei sowohl bei den L -Werten wie bei den maximalen, am Ausgang des Umformers zu erwartenden Meßwerten nur um Relativzahlen handelt, können beide mit beliebigen Zahlenfaktoren multipliziert werden. Für fünf verschiedene Thermoelemente (Spalte 1) sind in Tabelle 5 die inneren Widerstände w_i (Spalte 2)

Tabelle 5
Berechnete und bestimmte Leistungszahlen⁷⁾

Element Nr.	Widerstand w_i [Ohm]	E_T in 10^{-4} Volt	E_T^2/w_i in 10^{-12} Volt ² /Ohm	$(E_T^2/w_i)_{\max}$	$E_{\max} \cdot 20$ nach Tab. 3
2	115	170	251	308	360
	117	190	308	(2,5)	(2,56)
3	580	22	0,83	2,7	96
		38	2,5	(0,43)	(1,98)
	600	20	0,66		
		40	2,66		
4	180	250	347	354	280
		200	222	(2,55)	(2,45)
	182	254	354		
		137	103		
17	160	80	40	40	38
		60	22,5	(1,6)	(1,58)
	200	82	33,6		
		52	13,5		
24	510	500	490	706	1200
		500	490	(2,85)	(3,08)
	510	600	706		
		420	346		

und die Thermospannung E_T (Spalte 3) bei Belichtung zusammengestellt. Hieraus wird der Quotient E_T^2/w_i (Spalte 4) berechnet und der maximale Wert herausgezogen (Spalte 5). Zum Vergleich mit diesen Zahlen sind in Spalte 6 die Maximalwerte der Empfindlichkeit der Tabelle 3, Spalte 5 mit 20 multipliziert aufgeführt.

Jede Zelle wurde an zwei verschiedenen Tagen gemessen. Es ergaben sich etwas andere Widerstände w_i und andere Thermospannungen E_T . Die neben jedem w_i -Wert stehenden zwei Werte für E_T sind an der linken und rechten Lötstelle gemessen worden. Da bei Zelle 2 nur die eine Lötstelle anspricht, können nur die Hälfte der Werte angeführt werden. In den letzten beiden Spalten stehen in den Klammern die logarithmischen Werte der angegebenen Zahlen.

⁷⁾ Die in Klammern gesetzten Zahlen sind die Logarithmen der darüberstehenden.

Der Vergleich der auf verschiedenen Wegen erhaltenen Leistungswerte (Spalte 5 und 6 in Tabelle 5) ist bereits nach der Tabelle möglich. Bis auf Zelle Nr. 3 sind die Zahlen in besserer Übereinstimmung, als sich erwarten läßt^{a)}. Übersichtlicher wird der Vergleich in graphischer Form, wie ihn die Abb. 9 zeigt. Da die Werte um fast zwei Zehnerpotenzen auseinanderliegen, wurden sie in logarithmischem Maßstab aufgetragen. In Zukunft kann also stets bei der Frage nach der maximal abgebbaren Leistung eines Thermoelementes die Größe des Ausdruckes E_T^2/w_i als Kriterium herangezogen werden. Je größer dieser Ausdruck ist, um so größer wird der Nutzeffekt sein.

D. Zelle Bauart 2

I. Elementaufbau

a) Forderung. Die Beobachtungen an den ersten Zellen legten den Gedanken nahe, nicht erst zu warten, bis Silber in das Tellur hineindiffundiert, sondern sofort durch Aufdampfen von Silber auf Tellur dieses bereits mit einem Vorrat an Silber zu versehen. Um die Erscheinungen deutlicher beobachten zu können, wurde das Thermoelement etwa sechsmal so groß wie anfänglich gemacht. Die mittlere Tellurschicht hatte wieder rechteckige Gestalt und war 7,5 mm lang und 6 mm breit. Da die keilförmigen seitlichen Schichten sich bis auf 6 mm näherten, überlappten die das Element bildenden Metalle an jeder Seite um etwa 1 mm.

b) Als Halter der Thermoelemente dienten mikroskopische Objektträger, als Zuführungselektroden zwei aufgekittete Metallbacken der in Abb. 10

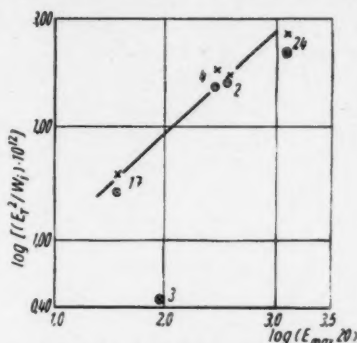


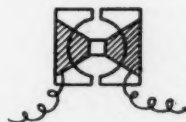
Abb. 9. Berechnete und bestimmte Leistungszahlen. Aufgetragen wurden

$$\log \frac{E_T^2}{w_i} \text{ und } \log E_{\max} \cdot 20.$$

E_T Thermospannung des Elementes bei Bestrahlung, w_i Innerer Widerstand des Thermoelementes, E_{\max} Meßwert am Ausgang des Verstärkers bei bester Anpassung, + Maximalwerte des Quotienten E_T^2/w_i , ○ Mittel aus allen Werten von E_T^2/w_i .



a



b

Abb. 10. Thermoelemente 2. Bauart auf mikroskopischen Objektträgern. Maßstab 1:1,7.
a) Objektträger mit „Elektroden“, b) „Elektroden“, mit Zaponlackhaut überspannt und aufgedampftem Thermoelement

^{a)} Bei Zellen mit hohen Ohmwerten ist stets zu vermuten, daß der Widerstand nicht durch das Element selbst bestimmt ist, sondern durch die Abnahme der Silberschichtdicke an den Kontaktstellen infolge der Diffusion des Silbers in das Tellur. Diese Verringerung der Schichtdicke führte im Laufe der Zeit meist zur Unterbrechung der leitenden Verbindung. Sollte bei Zelle 3 dieser Fall vorgelegen haben, so wäre natürlich der hohe Widerstand sowie auch die errechnete Leistung nicht in Zusammenhang mit der Thermospannung zu bringen und damit ihr abnormes Verhalten erklärt.

wiedergegebenen Form. Die über diese Elektroden gespannte Zelluloidhaut wurde wieder an den äußeren Rändern abgeschabt, damit das aufgedampfte Metall in elektrischem Kontakt mit den Elektroden stand. Die erste aufgedampfte Metallschicht hatte ebenfalls keilförmige Gestalt (Abb. 10). Die zweite Schicht war rechteckig und überlappte an jeder Seite um etwa 1 mm. Das Mittelstück bestand in den meisten Fällen aus Tellur, überdampft mit einer mehr oder weniger großen Menge des ersten Metalles. So war z. B. bei dem Element Ag/Te/Ag in der Mitte ein überdampftes Gemisch von $(\text{Te} + \text{Ag})$. Diese Art von Elementen wird im nachfolgenden Text mit $\text{Ag}/(\text{Te} + \text{Ag})/\text{Ag}$ oder $\text{Bi}/(\text{Te} + \text{Bi})/\text{Bi}$ bezeichnet. In dem Fall $\text{Ag}/(\text{Te} + \text{Ag})/\text{Ag}$ verhinderte in den meisten Fällen die zusätzliche Silbermenge zum Tellur und die Verstärkung der seitlichen (keilförmigen) Silberschichten die Ausbildung einer Unterbrechungszone, wie sie bei der 1. Form der Elemente häufiger auftrat (Abb. 7).

II. Ergebnisse am $\text{Ag}/(\text{Te} + \text{Ag})/\text{Ag}$ -Thermoelement

a) Thermospannung und innerer Widerstand. Zur Auffindung eines Elementes mit größtem Nutzeffekt sowie zur Feststellung und Festlegung der

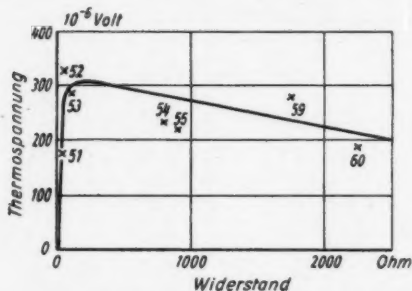


Abb. 11. Thermokraft von $\text{Ag}/(\text{Te} + \text{Ag})/\text{Ag}$ -Elementen in Abhängigkeit vom Elementwiderstand (Tellur-Silbergemisch), frische Elemente

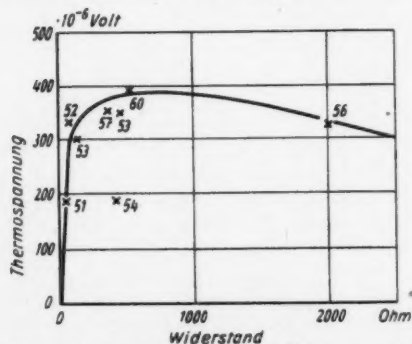


Abb. 12. Thermokraft von $\text{Ag}/(\text{Te} + \text{Ag})/\text{Ag}$ -Elementen in Abhängigkeit vom Elementwiderstand (Tellur-Silbergemisch), ältere Elemente

Herstellungsvorschrift ist die Kenntnis der Schichtdicken des aufgedampften Tellurs und der überlagerten Silbermenge unerlässlich. Aus Mangel an einer besseren z. Z. ausführbaren Methode wurde der Widerstand als Merkmal des Mengenverhältnisses von Tellur und Silber genommen. Da stärkere Schichten aus Tellur mit Silber den gleichen Widerstand zeigen wie dünne Schichten aus Silber, so war eine annähernd gleichstarke Tellurschicht die Voraussetzung für die Herstellung der Elemente. Diese Bedingung aber konnte nur durch grobe Schätzung erfüllt werden. Für die optische Untersuchung war die Anordnung gleich der von Abb. 2. Die Lichtintensität wurde wieder so eingestellt, daß sie in der Zelle Nr. 24 eine Spannung von $500 \cdot 10^{-6}$ Volt erzeugte. In allen Fällen ergab sich die der belichteten Stelle zunächst gelegene Elektrode als positiver Pol des Elementes. Die Abhängigkeit der Spannung an frischen Elementen von den inneren Widerständen im Bereich 0—2300 Ohm ist in Abb. 11, für dieselben Zellen im gealterten Zustand (nach 1 bis mehreren

Tagen) in Abb. 12 wiedergegeben. Bei aller Ungenauigkeit kann zu dieser Abhängigkeit den Kurven bereits entnommen werden, daß bei höheren Widerständen, also größerem Tellurgehalt, die Thermokräfte eher fallen als steigen. In dem Bereich kleinerer Widerstände bis etwa 600 Ohm steigt die Thermospannung in der in Abb. 12 wiedergegebenen Form. Das Absinken der Spannung bei kleinsten Widerstandswerten ist erklärlich, da bei vielem Silber- und wenigem Tellurgehalt sich thermoelektrisch die entstandene (Te + Ag)-Schicht nicht viel anders als das reine Silber verhalten wird.

b) Widerstands- und Thermospannungsänderungen. Über die Konstanz der mit den Wanderungserscheinungen von Silber in Tellur verknüpften Größe der Thermospannung und des Widerstandes gibt Tabelle 6 Auskunft.

Tabelle 6
Änderungen der Thermospannung und des Widerstandes einiger Elemente aus Ag/(Te + Ag)/Ag mit der Zeit. Die Thermospannung wurde durch Belichtung mit weißem Licht erzeugt

Element Nr.	Datum	Wdst. Ohm	Spannung [10 ⁻⁶ Volt]	Datum	Wdst. Ohm	Spannung [10 ⁻⁶ Volt]	Datum	Wdst. Ohm	Spannung [10 ⁻⁶ Volt]
41	8. 10. 43	500	+285	9. 10. 43	155	+275	28. 12. 43	132	+265
42	6. 10. 43	2 · 10 ⁴	+365	10. 10. 43	89	+375	29. 12. 43	34	+375
51	28. 12. 43	46	+175	29. 12. 43	46	+190	6. 3. 44	—	+195
52	28. 12. 43	50	+325	29. 12. 43	48	+345	6. 3. 44	—	+375
53	28. 12. 43	100	+285	29. 12. 43	108	+305	10. 3. 44	80	+285
54	28. 12. 43	800	+235	29. 12. 43	410	+190	6. 3. 44	—	+170
56	29. 12. 43	3150	—	30. 12. 43	2000	+330	9. 3. 44	88	+400
57	29. 12. 43	1200	+315	30. 12. 43	345	+355	8. 3. 44	65	+315
60	30. 1. 44	1750	+280	31. 12. 43	510	+395	9. 3. 44	510	+100

Die in Tabelle 6 angegebenen Beispiele zeigen die wesentlichen Erscheinungen, die folgendermaßen zusammengefaßt werden können.

1. Wenn sich der Widerstand eines Elementes selbst um Zehnerpotenzen ändert, bleibt die Größe der Thermospannung im wesentlichen konstant. Die Schwankungen der Spannungen in der Tabelle von der Größe $\pm 5\%$ entsprechen der Meßungenauigkeit. Sie lassen sich zwanglos durch die Ungenauigkeit der Einstellung des Lichtfleckes auf die Lötstelle erklären.

2. Die Widerstandswerte der Thermoelemente mit großem inneren Widerstand sind größeren Schwankungen als die der niedrigohmigen Elemente unterworfen. Das bedeutet, daß die mit wenig Silber versetzten Tellurschichten sich Silber aus den Nachbarschichten holen. Durch Diffusion des Silbers in das mittlere Gebiet des Tellurstreifens wird die Leitfähigkeit des Elementes erhöht; die Thermokraft bleibt dabei praktisch unverändert. Diese Erscheinung setzt bei Elementen mit Widerständen zwischen 100 und 1000 Ohm ein.

c) Die maximale Leistungsabgabe des Thermoelementes Ag/(Te + Ag)/Ag. Wird der Ausdruck E_T^2/w_i gebildet, dann ergibt sich für die in Abb. 11 und 12 angeführten Zellen eine Abhängigkeit dieses Quotienten von dem Widerstand w_i , die in Abb. 13 graphisch aufgetragen ist. Das in Abb. 11 und 12 vorliegende Maximum für die Thermospannung in Abhängigkeit vom inneren Widerstand wird in dem Ausdruck E_T^2/w_i sowohl durch die Bildung des Quadrates als auch

durch die Division mit w_i verstärkt. Danach scheinen die Elemente mit inneren Widerständen zwischen 50 und 100 Ohm praktisch die brauchbarsten zu sein. Diese Feststellung ist eine Handregel für die Herstellung der Elemente.

d) Vakuumeinfluß. Im Gegensatz zu den Zellen der 1. Bauart waren die Elemente 2. Art nicht in Röhrenform gebracht worden. Alle Messungen an diesen

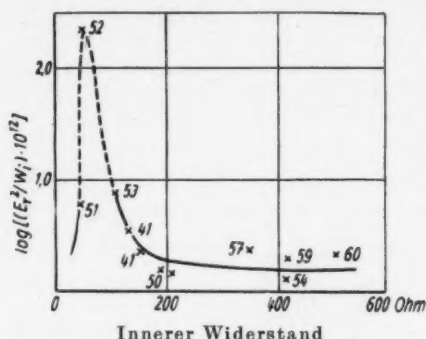


Abb. 13. Abhängigkeit der maximalen Leistungsabgabe (E_T^2/w_i) des Thermoelementes Ag/(Te+Ag)/Ag vom inneren Widerstand. Die Zahlen an den Meßpunkten bedeuten die Nummern der Zellen

mal so groß wie in Luft bei normalem Druck. Eine Nachprüfung des Verhältnisses für die Zellen 1. Bauart ergab den gleichen Wert.

e) Vorzeichenwechsel. Bei der Feststellung des Vakuumfaktors der Thermoelemente des Systems Ag/(Te + Ag)/Ag wurde folgender besonderer Effekt beobachtet. Nach Steigerung der Thermospannung um das 8–10-fache, die bei Druck-

Elementen erfolgten also in Luft. Zur Feststellung des Druckeinflusses wurden die mit den Thermoelementen versehenen Objektträger in ein größeres Glasgefäß gebracht und dort evakuiert. Bei vermindertem Druck wird durch Abnahme des Wärmeverlustes die bestrahlte Lötstelle wärmer werden, wobei allerdings auch die Trägheit zunimmt. Die Steigerung der Thermospannung nach Druckerniedrigung auf weniger als 10^{-3} Torr betrug das 9- bis 10-fache. Genauere Werte für einige Elemente sind in Tabelle 7 zusammengestellt.

Im Vakuum ist also die Empfindlichkeit des Elementes zehnfach. Eine Nachprüfung des Verhältnisses auf Werte kleiner als 10^{-4} Torr auftrat, schloß sich eine weitere Empfindlichkeitserhöhung an, die schließlich zu einer Steigerung auf das 80-fache des Ausgangswertes führte. Dabei trat eine Umkehrung des Vorzeichens auf. Die Erscheinung konnte wiederholt festgestellt werden. Da mit

Tabelle 7
Verhältnis der Empfindlichkeit einiger Thermoelemente in Luft (760 Torr) und Vakuum $<10^{-3}$ Torr
 $E_L:E_V$

Element Nr.	Verhältnis $E_L:E_V$	Mittelwert
40	1:12	1:10
41	1: 9	
42	1:10	
50	1: 9	

der Drucksenkung gleichzeitig eine Straffung der Trägerfolie auftrat, die sogar in einigen Fällen die Zelluloidfolie zum Zerreißen brachte, wurde zuerst geglaubt, daß der Effekt hiermit in Zusammenhang stünde. Die Versuche bestätigen jedoch nicht diese Vermutung. Die Feststellung der Ursache dieser Erscheinung mußte auf später verschoben werden.

III. Ergebnisse am Bi/(Te + Bi)/Bi-Thermoelement

a) Thermospannung und innerer Widerstand. Der Aufbau der Bi/(Te + Bi)/Bi-Thermoelemente entsprach dem der Ag/(Te + Ag)/Ag-Elemente,

so daß sich eine Beschreibung erübrigt. Die Meßergebnisse enthält Tabelle 8. Die Abhängigkeit der Thermospannung vom inneren Widerstand des Elementes läßt sich aus Tabelle 8 entnehmen.

Das Element Bi/(Te + Bi)/Bi zeigt das umgekehrte Vorzeichen wie das Ag/(Te + Ag)/Ag-Thermoelement. Seine Thermokraft scheint außerordentlich von der Reinheit des Wismuts oder von der Struktur der aufgedampften Schicht abzuhängen. So gelang bei der ersten Herstellungsserie eine Elementzusammensetzung mit doppelt so großer Thermokraft wie Z 24. Bei mehrfacher Wiederholung konnten die hohen Werte nicht mehr reproduziert werden. Es ergaben sich höchstens Thermospannungen vom zwanzigsten Teil. Die zeitliche Änderung der Elemente ist ungünstig, da sich der Widerstand allmählich erhöht. Eine Zersetzungerscheinung wie beim Ag/(Te + Ag)/Ag-Element konnte nicht festgestellt werden.

b) Empfindlichkeits- und Widerstandsänderung. Auch die Änderung der Thermospannung und des inneren Widerstandes der Elemente mit der Zeit gehen aus der Tabelle 8 hervor. In allen Fällen tritt im Laufe der Zeit sowohl eine Thermokraft- wie Widerstandserhöhung auf. Eine dem Ag—Te-Element analoge Erscheinung, wie etwa die Abwanderung des Bi von den seitlichen Elektroden, konnte nicht beobachtet werden.

c) Die maximal abgebbare Leistung des Thermoelementes Bi/(Te + Bi)/Bi. Der Ausdruck E_T^2/w_i gibt wieder ein Maß der maximalen elektrischen Leistung. Die höchstempfindlichen Zellen haben einen Widerstand von 1000 bis 2000 Ohm. Sie liegen also um eine Zehnerpotenz höher als die der Ag/(Te + Ag)/Ag-Elemente (vgl. Abb. 13). Ein Vergleich der elektrischen Leistungen der Ag/(Te + Ag)/Ag mit den Bi/(Te + Bi)/Bi-Elementen läßt erkennen, daß dem (Ag + Te)-Element der Vorzug gegeben werden muß, obgleich die durchschnittliche Spannung bei Bi höher ist als bei Ag.

IV. Beobachtungen an weiteren Metallzusammenstellungen

a) Das Element Sb/(Te + Sb)/Sb. Das Element Sb/(Te + Sb)/Sb zeigte mit der Zeit bei Zunahme des inneren Widerstandes ein Anwachsen der Thermokraft bis schließlich auf einen 20fachen Wert bei etwa 1000 Ohm innerem Widerstand verglichen mit dem der Zelle Z 24. Zu einer endgültigen Beurteilung

Tabelle 8
Ergebnisse der Messungen am Bi/(Te + Bi)/Bi-Thermoelement

Zelle Nr.	Wdzt. [Ohm]	Spannung an Lötleiste $V \cdot 10^6$		Wdzt. [Ohm]	Datum d. Messung	Spannung an Lötleiste $V \cdot 10^6$		Wdzt. [Ohm]	Datum d. Messung
		links	rechts			links	rechts		
61	650	—500	—480	750	1. 1. 44	—660	—600	950	8. 3. 44
62	140	—160	—186	150	1. 1. 44	—200	—200	—	8. 3. 44
63	490	—470	—330	500	1. 1. 44	—400	—380	1200	8. 3. 44
64	2650	—700	—800	3350	1. 1. 44	—820	—880	5000	9. 3. 44
65	750	—770	—880	970	6. 1. 44	—900	—800	1080	8. 3. 44

ist das Beobachtungsmaterial zu klein. Das Vorzeichen entspricht dem des $\text{Ag}/(\text{Te} + \text{Ag})/\text{Ag}$ -Elementes.

b) Das Element $\text{Bi}/(\text{Te} + \text{Sb})/\text{Bi}$ ist etwas empfindlicher als die reinen Sb/Bi -Elemente. Die Thermospannung betrug $4 \cdot 10^{-7}$ Volt/Hefnerkerze in 1 m Abstand. Zersetzungserscheinungen störten nicht.

c) Das Element $\text{Sb}/(\text{Te} + \text{Bi})/\text{Sb}$ ist nicht stabil. Das Antimon diffundiert von der Lötstelle fort. Von beiden letztgenannten Elementtypen liegen noch zu wenige Exemplare und Meßergebnisse vor, um abschließend etwas sagen zu können.

Schlußbemerkung

Die vorstehenden Ausführungen berichten über experimentelle Beobachtungen an Thermoelementen, bei denen Tellur oder Tellurzusätzen zu anderen Metallen eine besondere Bedeutung zukam. Auf einige Nebenerscheinungen wie Umkehrung des Vorzeichens der Thermospannung im Laufe der Messung und die Diffusion des Tellurs in das Silber wurde wenig ausführlich eingegangen. Der Vorzeichenwechsel der Thermospannung klärt sich durch die Untersuchungen von Th. Mohr auf, deren Beschreibung dieser Veröffentlichung unmittelbar folgt. Über den Diffusionsvorgang werden spätere Publikationen gleichfalls von Th. Mohr berichten, wenn die Ergebnisse uns dazu abgerundet genug erscheinen.

Halle (Saale), II. Physikalisches Institut der Martin-Luther-Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 14. November 1952.)

Thermospannung Tellur—Silber

(Untersuchungen
über die Besonderheiten des Tellur-Silber-Thermoelementes)¹⁾

Von Th. Mohr

(Mit 5 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

An Tellur-Silber-Thermoelementen wurde nachgewiesen, daß die Eindiffusion von Silber in Tellur eine Widerstandserniedrigung und die Ausbildung einer zusätzlichen zweiten, wandernden Lötstelle bedingt. Die beiden Lötstellen zeigen einen um eine Zehnerpotenz verschiedenen Vakuumfaktor, was auf die geometrischen Abmessungen und verschiedene Wärmeleitfähigkeit der einzelnen Schichten zurückgeführt wird. Gittervorgänge im reinen Tellur bewirken eine Widerstandserhöhung der Elemente.

Fragestellung

Die Untersuchungen von G. C. Mönch²⁾ hatten an Tellur-Silber-Thermoelementen eine zeitliche Abhängigkeit sowohl für das Vorzeichen der Thermospannung als auch für den Vakuumfaktor ergeben. Besonders wichtig schien zur Erklärung dieser Ergebnisse der Anlaufvorgang zwischen Silber und Tellur zu sein.

Zur Messung gelangten folgende Größen:

1. Eigenwiderstand der Thermoelemente.
 2. Thermospannung in Abhängigkeit von der belichteten Stelle auf dem Element bei fortschreitender Diffusion.
 3. Vakuumfaktor.
 4. Thermospannung pro Hefnerkerze und Meter nach erfolgter Diffusion.
- Der Aufbau der Proben geht aus Abb. 1 hervor.

Die Bestimmung der Größenordnung der Metallschichtendicken erfolgte durch Wägung des Abdampfschiffchens vor und nach der Bedampfung unter Zugrundelegung der Lambertschen Gesetze. Sie betrug bei der Tellur- bzw. Silber + Tellur-Mitte 0,1 bis 0,3 μ , beim Silberkontakt 0,5 bis 1 μ . Die Proben wurden nach der Herstellung bei Zimmertemperatur an Luft aufbewahrt.

¹⁾ 2. Mitteilung über Strahlungsempfänger.

²⁾ G. C. Mönch, Ann. Physik (6) **12**, 161 (1953).

Ergebnisse

1. Eigenwiderstand der Thermoelemente

Der Eigenwiderstand der Thermoelemente wurde mit Hilfe einer technischen Meßbrücke (Meßbereich 0,1 bis 100000 Ohm) festgestellt, um eine Fälschung der

Meßergebnisse infolge des Peltiereffektes zu vermeiden, der Stromkreis nur kurzzeitig geschlossen und die angelegte Spannung unter 0,5 Volt gehalten.

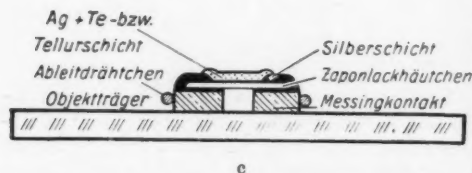
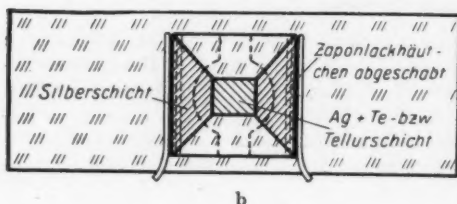
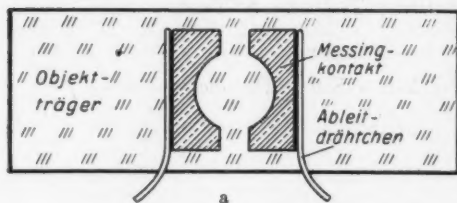


Abb. 1. Aufbau des Thermoelementes. a) Aufsicht auf den Träger mit Elektroden, b) Aufsicht, c) Seitenansicht des fertigen Elementes

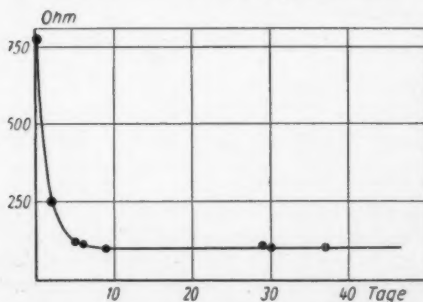


Abb. 2. Zeitliche Änderung des Eigenwiderstandes eines $\text{Ag}/(\text{Ag} + \text{Te})/\text{Ag}$ -Thermoelementes mit überlappend aufgedampfter Ag- und $(\text{Ag} + \text{Te})$ -Schicht

Aus Abb. 2 ist das zeitliche Verhalten von $\text{Ag}/(\text{Ag} + \text{Te})/\text{Ag}$ -Thermoelementen ersichtlich, bei denen Tellur gegenüber der Zusammensetzung, die einer Verbindung Ag_2Te entspricht, im Überschuß aufgedampft war. Der starke Abfall des Widerstandes während der ersten Tage ist auf die Bildung des Reaktionsproduktes von Ag und Te (vermutlich Ag_2Te) zurückzuführen. Dies war besonders deutlich bei der Untersuchung von $\text{Ag}/\text{Te}/\text{Ag}$ -Elementen zu erkennen, bei welchen die Veränderungen infolge der Ausbildung einer Anlaufschicht optisch sichtbar wurden. Probe 91 ($\text{Ag}/\text{Te}/\text{Ag}$) zeigte beispielsweise einen Widerstandsabfall von 15000 auf 280 Ohm innerhalb von 86 Tagen, solange die Diffusion erfolgte. Die Tellurschicht selbst ließ, falls die Eindiffusion von Silber verhindert wurde, mit der Zeit einen Anstieg des Widerstandes erkennen. In Abb. 3 ist der Sachverhalt wiedergegeben, wie er bei Proben gefunden wurde, bei welchen die Metalle Silber-Tellur nicht überlappend aufgedampft und die Unterbrechungsstellen mittels Hydrokollag überbrückt waren. Ähnliche Ergebnisse an kompaktem Tellur sind von

W. Haken³⁾, C. H. Cartwright und M. Habersfeld-Schwarz⁴⁾ u. a. festgestellt worden.

2. Thermospannung in Abhängigkeit von der belichteten Stelle auf dem Element bei fortschreitender Diffusion

a) Versuchsanordnung

Bei Messung der Thermospannung in relativer Einheit (beliebige, aber stets konstante Lichtverhältnisse) befand sich das Thermoelement immer in einem evakuierbaren Rezipienten, um gegebenenfalls den Einfluß des Vakuums messend verfolgen zu können (Vakuurfaktor).

Die Befestigung des Elementes wie die elektrische und optische Anordnung bei der Relativmessung gehen aus Abb. 4 hervor. Die beiden Ableitdrähtchen des Thermoelementes wurden isoliert nach außen geführt, wo sie an ein Galvanometer ($W_G = 180 \text{ Ohm}$, Empfindlichkeit 10^{-6} Amp/Skt.) direkt angeschlossen waren, so daß dieses den Thermostrom I_{Th} anzeigte. Die Thermospannung E_{Th} errechnet sich dann nach

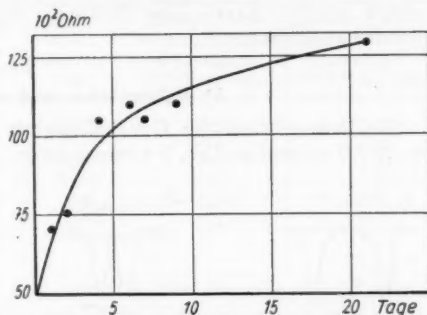


Abb. 3. Zeitliche Änderung des Eigenwiderstandes eines Ag/Te/Ag-Thermoelementes, bei welchem die Unterbrechung zwischen Silber- und Tellerschicht mittels Hydrokollag überbrückt wurde

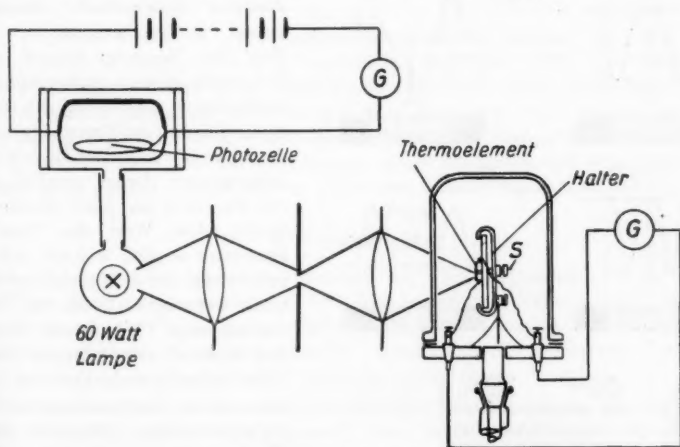


Abb. 4. Versuchsanordnung zur Messung der Thermospannung in relativer Einheit

³⁾ W. Haken, Ann. Physik **32**, 1 (1910).

⁴⁾ C. H. Cartwright u. M. Habersfeld-Schwarz, Proc. Roy. Soc. London **148**, Nr. 863 (1935).

der Formel: $E_{Th} = I_{Th} (W_i + W_G)$ (W_i = Eigenwiderstand des Elementes). Die Erwärmung rief eine Glühlampe von 60 Watt hervor, indem ein von ihr beleuchteter Spalt von 0,2 mm Öffnung auf dem Thermoelement abgebildet wurde (Abb. 4). Zur Feststellung der Abhängigkeit der Thermospannung von der beleuchteten Stelle auf dem Element konnte der Lichtspalt stufenweise um kleine Beträge parallel zum Element verschoben und damit jeweils eine Messung durchgeführt werden. Jede der Kurven der Abb. 5 geht aus einer derartigen Meßreihe hervor. Um die Konstanz der Lichtquelle überprüfen und bei zeitlich auseinanderliegenden Messungen wieder auf die alte Lichtstärke einstellen zu können, war seitlich von der Lampe eine Photozelle mit galvanometrischer Strommeßvorrichtung angebracht.

b) Meßergebnisse und deren Diskussion

Die Meßergebnisse der Ortsabhängigkeit der Thermospannung im Vakuum bei 10^{-5} Torr sind in Abb. 5 wiedergegeben. Das Evakuieren erwies sich als notwendig, um den störenden Einfluß der Wärme konvektion und -leitung durch die Luft zu unterdrücken.

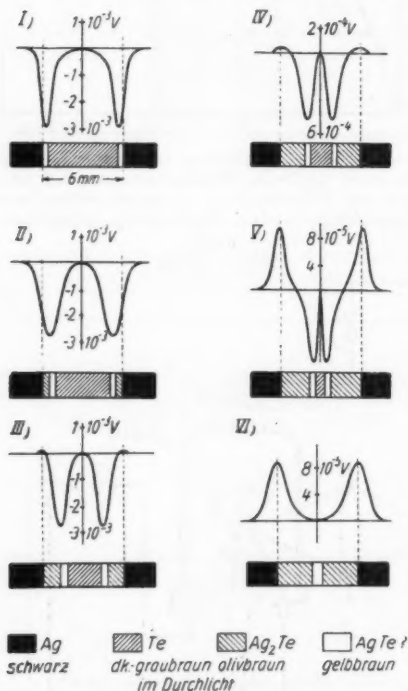


Abb. 5. Untersuchung des Anlaufvorganges mit Hilfe der Ortsabhängigkeit der Thermospannung

die Abhängigkeit der Thermospannung vom Eigenwiderstand bei Probe 91 wiedergegeben ist.

I) stellt den Sachverhalt sofort nach dem Aufdampfen dar, II) wurde 5 Tage, III) 21 Tage, IV) 45 Tage, V) 68 Tage und VI) 86 Tage nach der Herstellung gemessen. Unter den Kurven ist jeweils das Thermoelement in dem Zustand schematisch wiedergegeben, in welchem es sich zur Zeit der Messung befand. Den Schemata liegen photographische Aufnahmen zugrunde, die sofort nach Messung der Thermospannung gemacht wurden. Der Maßstab der Abszisse ist derart gewählt, daß die Ordinate an jeder Stelle der Kurve den Wert der Thermospannung angibt, welcher sich ergab, wenn die sich senkrecht darunter befindende Stelle des Thermoelementes beleuchtet wurde. Der Maßstab der Ordinate konnte nicht einheitlich beibehalten werden, da die Thermospannung mit fortschreitender Diffusion ihren Wert erheblich änderte. Zur Demonstration dieser Änderung kann Tabelle 1 dienen, in welcher

Aus Abb. 5 ist zu ersehen, daß sofort nach der Herstellung und bis zum 5. Tage nur die Thermospannung von Tellur gegen Silber in Erscheinung trat (nur negatives Vorzeichen). Die schmale Anlaufschicht, die bei II bereits deutlich zu sehen ist, vermag noch nicht genügend thermisch zu isolieren, um das positive Vorzeichen, das in der Nähe der Ag-Kontakte auftreten müßte, hervorzubringen. Wir müssen nämlich stets bedenken, daß infolge der Wärmeleitung alle Lötstellen, deren wir hier infolge der Diffusion vier haben, mit erwärmt werden und somit stets Differenzen der Thermospannung gemessen werden. Bei III, IV und V ist der Vorzeichenwechsel deutlich feststellbar. Bei VI ist schließlich nur noch das positive Vorzeichen der Thermospannung vorhanden, der Anlaufvorgang ist beendet.

Tabelle 1
Abhängigkeit der Thermospannung vom Eigenwiderstand bei Probe 91 (Ag/Te/Ag)

Zeit in Tagen	Eigenwiderstand in Ohm	„Innere“ Lötstelle, Thermospannung in 10^{-3} V im Vak.	„Äußere“ Lötstelle, Thermospannung in 10^{-3} V im Vak.
0	15000	—2,76	0
10	8500	—2,74	3,0
21	5000	—1,42	7,2
40	1670	—0,50	3,9
53	560	—0,16	6,2
63	445	—0,11	10,7
86	280	0	8,7

Über die Lage der maximalen thermoelektrischen Ausschläge gibt Abb. 5 ebenfalls Aufschluß. Diese liegen (abgesehen vom Anfangsstadium) stets an den eigentlichen Lötstellen, d. h. an den Orten auf dem Thermolement, an welchen verschiedene Phasen aneinandergrenzen. Da infolge der Diffusion des Silbers und Bildung der Anlaufschicht die innere Lötstelle wandert, wandert gleichlaufend die Stelle des maximalen negativen thermoelektrischen Ausschlages auf dem Element.

Aus diesem Verhalten ist zu entnehmen, daß die Untersuchung der Ortsabhängigkeit der Thermospannung es gestattet, Diffusions- bzw. Anlaufvorgänge auch quantitativ zu verfolgen. Insbesondere wird sich diese Methode bei Verwendung dünner Schichten bzw. dünner Drähte bewähren, wenn die stattfindende Diffusion zur Bildung einer intermetallischen Phase führt und optisch nicht sichtbar verfolgt werden kann. Die Untersuchungen zeigen eindeutig, daß der Vorzeichenwechsel beim System Tellur—Silber durch den Anlaufvorgang bedingt ist.

3. Vakuumfaktor

Als Vakuumfaktor wird das Verhältnis der Thermospannung bei 10^{-3} Torr zum Wert der Thermospannung bei 760 Torr bezeichnet. Tabelle 2 gibt den Vakuumfaktor einiger Proben nach beendeter Diffusion wieder, in Tabelle 3 sind die Werte der „äußeren“ und der „inneren“, wandernden Lötstelle von Probe 73 (Ag/(Ag + Te)/Ag) und Probe 91 (Ag/Te/Ag) eingetragen.

Die Untersuchung lieferte zunächst die gleichen Ergebnisse, wie sie G. C. Mönch²⁾ fand, nämlich $E_{10^{-3}}/E_{760} \sim 10$ bzw. ~ 100 (siehe Tabelle 3). Bei genauerer Verfolgung dieser Erscheinung zeigte es sich, daß der Faktor ~ 100 nur bei Proben mit Vorzeichenwechsel auftrat und zwar nur an der „inneren“ Lötstelle, die durch die stattfindende Diffusion verursacht wurde. Auch hier waren die Verhältnisse am klarsten bei den Thermolementen mit reiner „Te-Mitte“ (Ag/Te/Ag) zu erkennen. Betrachten wir hierzu Abb. 5, so ist dies die Lötstelle

von negativer Thermospannung, welche mit fortschreitender Diffusion nach innen wandert. Der Vakuumfaktor blieb von der Herstellung an bis zum Verschwinden der Lötstelle in der Größenordnung von 100, jedoch waren die letzten Messungen, bei denen im Vakuum eine Thermospannung von $\sim 10^{-4}$ Volt festgestellt wurde,

nicht sicher, da hier der Ausschlag des Galvanometers bei 760 Torr in der Größenordnung von 0,1 Skalenteilen lag und eine genaue Ablesung deshalb nicht mehr möglich war.

Bei einigen „Ag + Te-Proben“ war an der „inneren“ Lötstelle ein Vakuumfaktor von ~ 50 und größer gefunden worden, so daß angenommen werden muß, daß je nach der Menge des dem Tellur zugesetzten Silbers sich der Vakuumfaktor ändert, und zwar in dem Sinne, daß er bei größerem Ag-Zusatz niedrigere Werte annimmt.

Tabelle 2
Vakuumfaktor einiger Proben nach beendeter Diffusion

Nr. der Probe	Vakuumfaktor	Träger der Metallschicht
41	12,6	Zaponlackhäutchen
42	14,0	„
44	10,6	„
46	9,6	„
55	11,6	„
73	13,5	„
64	2,8	Glimmerfolie
65	2,2	„
57	2,0	„

An der „äußeren“ Lötstelle trat sowohl bei den „Te- als auch bei den Ag + Te-Proben“ der Vakuumfaktor ~ 10 auf.

Daß die geometrischen Bedingungen und die Wärmeleitfähigkeit der einzelnen Schichten (Ag, Diffusionszone, Te) allein die Verschiedenheit des Vakuumfaktors verursachen, wird angenommen. Die Vermutung läßt sich durch Versuche bekräftigen, bei denen die Metallschichten auf eine 20 bis 30 μ starke Glimmerfolie aufgedampft waren. Hier lag der Vakuumfaktor sowohl für die „innere“ als auch für die „äußere“ Lötstelle in der Größenordnung von ~ 2 bis ~ 4 .

Tabelle 3
Vakuumfaktor bei Probe 73 (Ag/(Ag + Te)/Ag) und Probe 91 (Ag/Te/Ag)

Nr. Elementaufbau	Zeit nach der Herstellung in Tagen	Vakuumfaktor	
		„äußere“ Lötstelle	„innere“ Lötstelle
73 Ag/(Ag + Te)/Ag	0	15	85
	2	14	—
	5	13,5	—
91 Ag/Te/Ag	0	—	100
	10	8,5	100
	21	11,0	103
	40	10,0	105
	54	9,8	100
	64	8,0	100—120
	79	10,3	—

tion durch die Luftteilchen hatte hier kaum einen Einfluß. Wären für das Auftreten des hohen Vakuumfaktors ~ 100 andere Eigenschaften der Schichten maßgebend als die oben genannten, so müßte sich dies auch im Falle der Verwendung von Glimmerfolien bemerkbar machen.

4. Thermospannung pro Hefnerkerze und Meter nach erfolgter Diffusion

Um ein Maß für die Empfindlichkeit der Thermoelemente zu haben, wurden sie frei (außerhalb des Rezipienten) aufgebaut, ohne Zwischenschaltung von Linsen mit einer Hefner-Kerze beleuchtet, und aus den gemessenen Daten die Thermospannung pro Hefner-Kerze bei 1 m Abstand der Lichtquelle vom Thermoelement berechnet. Ein dicht vor dem Element angebrachter Spalt (Abstand ~ 2 mm) bewirkte die Beleuchtung nur einer Lötstelle. Die Spaltbreite wurde derart gewählt, daß bei konstanter Entfernung der Hefner-Kerze vom Thermoelement das Maximum des Thermostromes angezeigt wurde. Dies entsprach der Ausleuchtung der halben „Mitte“. Da der Ausschlag des Galvanometers bei 1 m Abstand der Hefner-Kerze vom Element zu gering war, wurde bei 30 cm Abstand gearbeitet, nachdem vorher an einigen Proben die Gültigkeit des quadratischen Abstandsgesetzes überprüft worden war.

Tabelle 4 enthält die Meßergebnisse, wobei gleichzeitig der Eigenwiderstand und die relative Lichtdurchlässigkeit (als Maß für die Dicke der Anlaufschrift) sowie die maximale Leistungsabgabe der Elemente E_T^2/W_t (siehe G. C. Mönch²⁾) mit angegeben sind.

Ein Gang der Thermospannung mit dem Widerstand bzw. der relativen Schichtdicke (Lichtdurchlässigkeit) liegt nicht vor.

Die maximale Leistungsabgabe der Elemente scheint mit fallendem Eigenwiderstand zuzunehmen.

Tabelle 4

Thermospannung und maximale Leistungsabgabe einiger Proben bei Beleuchtung mit 1 Hefner-Kerze in 1 Meter Abstand, dazu Eigenwiderstand und relative Lichtdurchlässigkeit der Proben

Nr. der Probe	Thermospannung in 10^{-7} V (760 Torr) bei 1 HK in 1 m Abstand	Eigenwiderstand W_t in Ohm	rel. Lichtdurchl. I_d/I_0	Maximale Leistungsabgabe E_T^2/W_t in 10^{-12} Watt
34	3,1	345	0,28	2,8
35	2,5	195	0,27	3,2
41	4,0	190	0,27	8,4
43	4,2	296	0,29	5,95
46	2,7	68	0,26	10,7
47	3,3	67	0,25	16,2
49	3,3	96	0,26	11,3
50	3,5	114	0,27	10,7
52	2,8	73,5	0,30	10,6
56	3,5	86	—	15,1
59	4,2	50	0,21	35,2

(Mittelwert der Thermospannung $3,4 \cdot 10^{-7}$ Volt bei 1 HK in 1 m Abstand).

Zusammenfassung

1. Für das zeitliche Widerstandsverhalten der Thermoelemente konnte nahegelegt werden, daß die Diffusion von Silber in Tellur und die Ausbildung einer Anlaufschrift, sowie Gittervorgänge im reinen Tellur die Ursache für das Zustandekommen der Diagramme Abb. 2 und 3 sind.

2. Das Auftreten eines thermoelektrischen Vorzeichenwechsels ist durch die stattfindende Diffusion und Bildung einer Anlaufschrift bedingt. Dies trat be-

sonders deutlich bei den Elementen Ag/Te/Ag in Erscheinung. Die diesbezüglichen Untersuchungen zeigten gleichzeitig die Möglichkeit, Diffusionserscheinungen bzw. Anlaufvorgänge auf thermoelektrischem Wege zu verfolgen.

3. Der unterschiedliche Vakuumfaktor der beiden Lötstellen („innere“: 100, „äußere“: 10) wird auf verschieden große Wärmeleitfähigkeit der einzelnen Schichten und die geometrischen Bedingungen, insbesondere auch der Unterlage zurückgeführt.

4. Die maximale Leistungsabgabe der Elemente wächst mit fallendem Eigenwiderstand.

Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr. G. C. Mönch für die Anregung zu dieser Arbeit und für wohlwollende Unterstützung.

Halle a. d. S., II. Physikalisches Institut der Martin-Luther-Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 14. November 1951.)

Experimentelle Untersuchungen am Wismutbolometer und theoretische Auslegungen der Ergebnisse¹⁾

Von G. C. Mönch, G. Wichert und O. Böttger

(Mit 52 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

An Wismutbolometern, hergestellt durch Metallverdampfung im Hochvakuum und Kondensation des Wismutdampfes auf Zelluloidhäutchen, wurden mit dem Trägerfrequenzverfahren unter Benutzung eines Kathodenstrahloszillographen als Anzeigeeinstrument Messungen ausgeführt. Die Bestrahlung der Bolometer, in ungeschwärztem und berußtem Zustand, erfolgte mit Gleich- und Wechsellicht, und zwar mit Rechteckimpulsen, die durch Rotation von Blenden vor einem engen Spalt entstanden. Auch der Verlauf einer einmaligen kurzzeitigen Bestrahlung bei verschiedenen langen Lichtblitzen wurde untersucht. Die Messungen geben die Amplituden des Oszillographenstrahles (Meßausschlag) in Abhängigkeit von der Dicke der (Zelluloid-)Trägerfolien und der Wismutschicht, von dem Druck des das Bolometer umgebenden Gases und von der Frequenz des Wechsellichtes für Bolometer mit blanken und geschwärzten Oberflächen an. Die für die Zeitkonstante gefundenen Abhängigkeiten vom Gasdruck, Trägerfoliendicke und Metallschichtdicke lassen sich theoretisch verständlich machen. Die Absolutempfindlichkeit des Wismutbolometers der benutzten Bauart wird mit der anderer Strahlungsempfänger verglichen.

I. Allgemeine theoretische Grundlagen

A. Energiebilanz am Bolometer

Ein Bolometer wird durch Strahlungsabsorption um den Temperaturbetrag ΔT erwärmt und dadurch sein elektrischer Widerstand verändert. Diese Widerstandsänderung kann als Maß der einfallenden Strahlung in einer Brückenschaltung gemessen werden. Wählen wir bei der Aufstellung der Energiebilanz in Übereinstimmung mit Czerny die Bezeichnung W_k für die Wärmekapazität (Watt sek cm⁻² grad⁻¹) des Bolometers pro Flächeneinheit pro Grad Übertemperatur und W_v (Watt cm⁻² grad⁻¹) für den spezifischen Wärmeverluststrom, d. h. den gesamten Wärmeverlust pro Flächeneinheit, pro Grad Übertemperatur und Zeiteinheit gegenüber der Umgebung, so läßt sich mit $Q(t)$ als Einstrahlungsfunktion schreiben²⁾:

$$\frac{d(W_k \Delta T)}{dt} + W_v \Delta T = Q(t). \quad (1)$$

¹⁾ 3. Mitteilung über Strahlungsempfänger.

²⁾ Vgl. M. Czerny, W. Kofink u. W. Lippert, Ann. Physik 8, 65 (1950). Siehe auch J. M. W. Milatz u. H. A. van der Velden, Physica 10, 369 (1943); R. Clark Jones, J. Opt. Soc. Amer. 37, 880 (1947).

Wir wollen einen Schritt weiter gehen und die Größen W_k und W_v , die abhängig von der Art und dem Druck des Füllgases sind, noch zerlegen, wobei nunmehr für W_k die Bezeichnung \overline{W}_k und diese als folgende Summe geschrieben wird.

$$\overline{W}_k = W_{kk} + W_{kg}. \quad (2)$$

Mit W_{kk} wird der Anteil der Wärmekapazität bezeichnet, der allein durch die Konstruktion des Empfängers bedingt ist, wie z. B. die Form des Bolometers, Dicke und Art der Metallschicht und deren Unterlage, gegebenenfalls noch die der Schwärzungsschicht. W_{kg} ist der druckabhängige Anteil des den Bolometerstreifen umgebenden Gasmantels an der Wärmekapazität.

Für den Wärmeverluststrom W_v kann man ähnlich vorgehen. Man zerlegt ihn in einen Strahlungsanteil W_{vs} und einen Leitungsanteil W_{vl} . Die den Wärmeverlust durch Leitung angegebende Größe W_{vl} läßt sich darstellen als Summe von W_{vk} , dem konstruktionsbedingten Verlust durch Leitung innerhalb der Bolometer- sowie Trägerschicht, und von W_{vg} , dem durch Leitung und Konvektion des umgebenden Gases bestimmten Anteil. Es ist also:

$$\overline{W}_v = W_{vs} + W_{vl} = W_{vs} + W_{vk} + W_{vg}. \quad (3)$$

Für den gesamten Strahlungsverlust S_v pro Flächen- und Zeiteinheit erhält man:

$$S_v = \sigma (\alpha_1 + \alpha_2) (T^4 - T_0^4), \quad (4)$$

dabei bedeuten σ die Stefan-Boltzmannsche Konstante, α_1 den Emissionskoeffizienten der Vorderseite, α_2 den der Rückseite, T die Temperatur des strahlenden Bolometers und T_0 die Temperatur des umgebenden Gefäßes. Für T erhält man:

$$T = T_0 + T_u + \Delta T. \quad (5)$$

Dabei ist T_u die Temperaturerhöhung, die durch die Aufheizung des Bolometers hervorgerufen wird, und ΔT die Temperaturerhöhung, die durch die Einstrahlung bedingt ist.

Setzt man diesen Ausdruck (5) in die Formel (4) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} S_v &= \sigma (\alpha_1 + \alpha_2) [(T_0 + T_u + \Delta T)^4 - T_0^4] \\ &= \sigma (\alpha_1 + \alpha_2) [(T_0 + T_u)^4 + 4 (T_0 + T_u)^3 \Delta T + 6 (T_0 + T_u)^2 \Delta T^2 \\ &\quad + 4 (T_0 + T_u) \Delta T^3 + \Delta T^4 - T_0^4]. \end{aligned} \quad (6)$$

Selbst in ungünstigen Fällen, wenn $T_0 + T_u$ etwa 100°K und ΔT etwa $1/1000^\circ \text{K}$ beträgt, ist das in ΔT lineare Glied immer noch wesentlich³⁾ größer als die Glieder, die ΔT in höherer Potenz enthalten, daher können letztere vernachlässigt werden. Der von ΔT unabhängige Anteil des Strahlungsverlustes geht in die Differentialgleichung nicht mit ein, da diese Leistung durch die Aufheizung des Bolometers vom Heizstrom aufgebracht wird.

Dadurch lautet der Strahlungsanteil des spezifischen Wärmeverluststromes:

$$W_{vs} = 4 \sigma (\alpha_1 + \alpha_2) (T_0 + T_u)^3 \quad (7)$$

und der gesamte Wärmeverluststrom pro Grad Temperaturerhöhung⁴⁾:

$$\overline{W}_v = W_{vl} + 4 \sigma (\alpha_1 + \alpha_2) (T_0 + T_u)^3. \quad (8)$$

³⁾ Für die angegebenen Zahlenwerte ist das lineare Glied etwa 10^4 mal größer als das in ΔT quadratische.

⁴⁾ Bei kleinem T_0 kann in (8) der Strahlungsanteil mit guter Näherung durch $4 \sigma (\alpha_1 + \alpha_2) T_0^3$ angegeben werden.

Man hat also in erster Näherung durch den linearen Ansatz für den Wärmeverluststrom auch den Strahlungsanteil mit erfaßt.

Aus der Formel (8) ist zu ersehen, daß bei großem T_u der Strahlungsanteil bei Verringerung des Druckes schon wesentlich eher eine Rolle zu spielen beginnt gegenüber dem Leitungsanteil als bei kleinem T_u .

Die Differentialgleichung lautet also:

$$\frac{d(\bar{W}_k \Delta T)}{dt} + \bar{W}_v \Delta T = Q(t) \quad \text{oder} \quad (9)$$

$$\frac{d[(W_{kk} + W_{kg}) \Delta T]}{dt} + (W_{vl} + 4\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)(T_0 + T_u)^3) \Delta T = Q(t),$$

wobei für den einfachsten Fall $Q(t) = \text{const.}$ gesetzt sei.

Der erste Term $\frac{d(\bar{W}_k \Delta T)}{dt}$ ist die zeitliche Änderung des Energieinhaltes des Bolometers.

Der zweite Term $\bar{W}_v \Delta T$ ist die vom Bolometer pro Zeit- und Flächeneinheit an die Umgebung abgegebene Energie.

$Q(t)$ ist der vom Bolometer 'genutzte Anteil der Einstrahlungsfunktion. Er wird beeinflusst von dem „Wirkungsgrad“, mit dem sich die einfallende Strahlung in Wärme umsetzt, der wiederum durch das Absorptionsvermögen des Bolometers wesentlich mit bestimmt ist. Man muß also anstreben, das Absorptionsvermögen auf ein Maximum zu steigern. Dazu ist folgendes zu bemerken: Das Absorptionsvermögen eines oberflächlich nicht geschwärzten Metalles ist im Falle genügend langwelliger Strahlung allein durch die elektrische Leitfähigkeit gegeben⁵⁾. Es hat für ein dünnes lichtdurchlässiges Metallhäutchen dann ein Maximum, wenn 50% hindurchgelassen werden. Für diesen Fall nimmt der Quadratwiderstand $1/(\kappa \cdot d)$ [κ = spez. Leitfähigkeit] numerisch den Wert 188,50 Ohm an, wenn damit der Widerstand einer quadratischen Metallfolie der Dicke d bezeichnet wird, die parallel zu einem Paar der sie begrenzenden Seitenlinien und senkrecht zur Dickenrichtung durchflossen wird. Andererseits läßt sich das Absorptionsvermögen des Bolometers durch Schwärzung bis nahe an 100% bringen. Dieser Fall bietet aber für die Diskussion von (9) nichts wesentlich Neues. Es ist nur zu bedenken, daß \bar{W}_v ansteigt wegen der mit der Schwärzung verbundenen Verbesserung des Strahlungsvermögens.

Bei unbestrahltem Bolometer, also vor Versuchsbeginn für $t < 0$ ist $Q(t) = 0$, nach Versuchsbeginn für $t > 0$ unterscheiden wir drei Hauptfälle für Q :

a) Konstante Einstrahlung

$$Q(t) = \text{const.}$$

b) Einstrahlung mit sinusförmig moduliertem Licht (der Kreisfrequenz ω):

$$Q(t) = \frac{Q}{2} \cdot (1 + \cos \omega t).$$

c) Allgemeinste Form der periodischen Lichteinstrahlung:

$$Q(t) = \text{beliebige periodische Funktion.}$$

Insbesondere soll später im Falle c) die Einstrahlung mit periodischen Rechteckimpulsen behandelt werden.

⁵⁾ Siehe W. Woltersdorf, Z. Physik 91, 230 (1934).

B. Die Wärmekapazität \bar{W}_k

Über den Anteil, den die einzelnen Faktoren des Empfängers zur Wärmekapazität \bar{W}_k und zum spezifischen Wärmeverluststrom \bar{W}_v beitragen, lassen sich nun weitere Betrachtungen und Versuche anstellen. Einen Beitrag sowohl für \bar{W}_k als auch für \bar{W}_v , soweit es sich hierbei um die Wärmeleitung bzw. Konvektion handelt, leisten

- a) die Bolometerschicht selbst,
- b) die Trägerschicht des Bolometers,
- c) die Schwärzungsschicht des Bolometers,
- d) die Gasart und der Gasdruck in der Umgebung des Bolometers.

Hierzu kommt als weiterer Anteil für den Wärmeverluststrom allein

- e) die Strahlung der Bolometeroberfläche.

Es ergeben sich Beziehungen der Empfindlichkeit der Messung zur Frequenz des Wechsellichtes und zur Übertemperatur des durch die Stromwärme aufgeheizten Bolometerstreifens.

Auch lassen sich Aussagen für den Grenzfall einer Wechsellichtbestrahlung der Frequenz $\omega = 0$, also für Dauerlichtbestrahlung und zu Punkt d) für den weiteren Grenzfall des Hochvakuums machen.

C. Der Wärmeverluststrom \bar{W}_v

Der Wärmeverluststrom ist die Summe der schon unter IB aufgeführten Wärmeabgaben a) bis e).

Von diesen fünf Anteilen verschwinden mit fallendem Druck die durch das Füllgas (d) bedingte Wärmeleitung und Konvektion. Da das Bolometer durch den Brückenstrom aufgeheizt wird, läßt sich über den Wärmeverluststrom \bar{W}_v folgendes sagen:

Fließt durch einen Bolometerzweig ein Strom i , so erhöht sich seine Temperatur gegenüber der der Umgebung. Ist T_0 seine Temperatur vor dem Stromdurchgang, T diejenige während des Stromdurchganges, so nimmt er also die Übertemperatur $T_u = T - T_0$ an. Abb. 1 ist Czernys Arbeit entnommen und gibt den Verlauf des Widerstandes R einer Wismutfolie, für die der Wider-

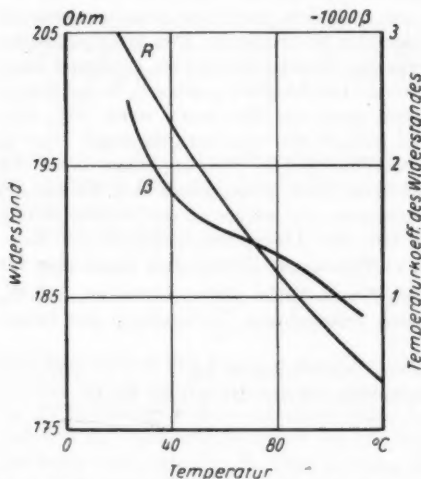


Abb. 1. Widerstand (R) und Temperaturkoeffizient des Widerstandes (β) einer Wismutfolie nach Czerny. R Widerstand (bei $T_0 = 293^\circ \text{K}$, $R_0 = 206,40 \text{ Ohm}$), $\beta = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}$ differentieller Temperaturkoeffizient*)

*) Inzwischen liegen eigene Messungen des Widerstandes in Abhängigkeit von der Temperatur vor. Die Abweichung von der in Abb. 1 angegebenen Widerstandskurve ist unwesentlich. Bei der Probe, die bei 20°C einen Widerstand von 208 Ohm zeigte, wurde für 80°C der Widerstand zu 183 Ohm gemessen.

stand (bei $T_0 = 293^\circ \text{K}$) $R_0 = 206,4 \text{ Ohm}$ betrug, und den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes $\beta = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}$, beide in Abhängigkeit von ihrer Temperatur T wieder. Der Temperaturkoeffizient ist negativ (der Widerstand fällt mit wachsender Temperatur) und sein Absolutwert halb so groß wie der des massiven Metalles. Die Abb. 2 ist ebenfalls Czernys Arbeit entnommen und gibt mit $R_0 = 206,4 \text{ Ohm}$ und $T_0 = 293^\circ \text{K}$ die Abhängigkeit des absoluten Betrages der relativen Widerstandsänderung $\frac{R - R_0}{R} = \frac{R_a}{R}$ von der Übertemperatur T_a an, wobei R der Widerstand des elektrisch erwärmten Bolometers ist.

Der aufgeheizte Bolometerstreifen gibt an seine Umgebung Wärme ab. Die Stärke dieser Wärmeabgabe wird durch den Wärmeverluststrom pro cm^2 und pro Grad bestimmt. Wenn V die Heizspannung und F die Fläche des Bolometers bedeuten, ist die pro cm^2 der Schicht zugeführte elektrische Heizleistung

$$L = \frac{V^2}{RF}. \quad (10)$$

Ist T_a die durch die Strombelastung verursachte und durch die relative Widerstandsänderung $\frac{R_a}{R}$ bestimmte, aus Abb. 2 entnehmbare Übertemperatur, so läßt sich der spezifische Wärmeverluststrom \bar{W}_v errechnen aus der Beziehung^{a)}:

$$\bar{W}_v \cdot T_a = L. \quad (11)$$

L ist daher auch gleichzeitig die Stärke des Wärmeverluststromes pro cm^2 .

Aus Formel (10) und (11) folgt, wenn i_B den Strom durch das Bolometer bedeutet (wegen $\beta = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}$)

$$i_B = \frac{V}{R} = \sqrt{\frac{LF}{R}} = \sqrt{\frac{\bar{W}_v F T_a}{R}}. \quad (12)$$

Liegt das Bolometer in einem Zweig einer Wheatstoneschen Brücke und ist die Brücke auf Null abgeglichen, d. h. der Brückenstrom $i_G = 0$, so bewirkt die Einstrahlung der Energie Q pro Flächen- und Zeiteinheit einen Strom im Galvano-

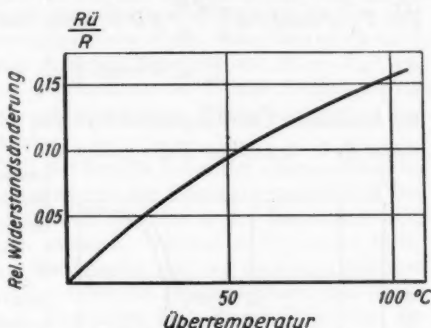


Abb. 2. Absolutwert der relativen Widerstandsänderung $\frac{R - R_0}{R}$ nach Czerny. $R_0 = 206,4 \text{ Ohm}$ für $T_0 = 293^\circ \text{K}$. $\frac{R_a}{R} = \frac{R - R_0}{R}$, $T_a = T - T_0$

^{a)} Diese Gleichung gilt für beliebige T_a solange man sich auf Drucke höher als 10^{-2} Torr beschränkt. Wenn man die Gleichung auch für kleinere Drucke anwenden will, muß man sich auf kleine T_a ($T_a < T_0$) beschränken. Über die Berechtigung dazu vgl. Fußnote ^{a)} (analog ΔT).

meter der Größe⁷⁾:

$$i_G = \text{const.} Q \sqrt{\frac{F T_a}{R W_e}} \beta R. \quad (13)$$

Für $T_a = \text{const.}$ ist $\sqrt{\frac{F T_a}{R}} \beta R = \text{const.}$ und man erhält wegen (11)

$$i_G = \text{const.} \sqrt{\frac{1}{W_e}} = \text{const.} \sqrt{\frac{1}{L}}. \quad (14)$$

Bei konstanter Übertemperatur wird also mit abnehmendem spez. Wärmeverluststrom i_G^2 in demselben Maße größer wie \bar{W}_e abnimmt, und somit muß auch ε^2 ansteigen, wenn ε die Skalenteile des den Strom anzeigenden Galvanometers bedeutet.

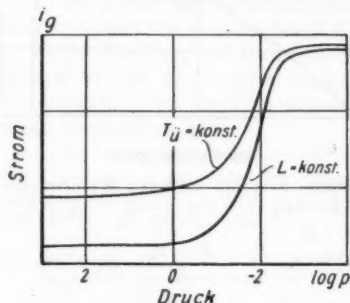


Abb. 3. Abhängigkeit des Galvanometerstromes i_G vom Druck (für $T_a = \text{const.}$ und $L = \text{const.}$ (Heizleistung am Bolometer))

Die obere Kurve der Abb. 3, die für $T_a = \text{const.}$ bestimmt wurde, zeigt ein derartiges Absinken des spez. Wärmeverluststromes zwischen 10^{-1} und 10^{-3} Torr beim Evakuieren. Die Höhe des Sprunges (Ausfallsdifferenz zwischen den Werten für 100 und 10^{-4} Torr in Abb. 3) wird bei Änderung der Heizleistung verschieden groß ausfallen.

zurück und lassen jetzt T_a variabel. Setzt man in (13) T_a nach (11) ein und formt nach (10) um, so erhält man für $Q = \text{const.}$:

$$i_G = \text{const.} \sqrt{\frac{V^2}{W_e^2}} \beta = \text{const.} \frac{V}{W_e} \beta. \quad (15)$$

Bei der unteren Kurve der Abb. 3 gilt wegen $L = \frac{V^2}{RF} = \text{const.}$ (β sei wegen der geringen Änderung ebenfalls konstant gesetzt) $i_G = \text{const.} V T_a$ (nach (11)), daraus läßt sich folgern, daß in demselben Maße seiner Änderung der Wärmeverluststrom kleiner und T_a größer wird. Der steilere Anstieg der unteren Kurve der Abb. 3 beruht somit auf einer stärkeren Erhitzung des Streifens, entsprechend steigt aber auch der Störausschlag.

⁷⁾ Es gilt nach F. Kohlrausch, Praktische Physik S. 47 (1950):

$$i_G = \text{const.} i_B \Delta R, \quad (12a)$$

da $\Delta R = \beta R \Delta T$ wird mit (12)

$$i_G = \text{const.} \sqrt{\frac{\bar{W}_e F T_a}{R}} \beta R \Delta T, \quad (12b)$$

da analog zu (11) $\Delta T = Q/\bar{W}_e$ ist, mit $Q = \text{const.}$, ergibt sich

$$i_G = \text{const.} Q \sqrt{\frac{F T_a}{R W_e}} \beta R. \quad (13)$$

Bei mittleren Drucken (um 1,5 Torr Luft) ist der Wärmeverluststrom nach den Messungen von Czerny und Mitarbeitern⁸⁾ konstant und wird hauptsächlich durch die Wärmeleitung und -konvektion bedingt. In diesem Gebiet steigt daher nach (15) der Galvanometerstrom und damit die Empfindlichkeit fast⁹⁾ linear mit der Heizspannung an. Überwiegen die Strahlungsverluste, so gelten auch die Gln. (11) und (15) nicht mehr, denn der Wärmeverluststrom steigt dann theoretisch nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz in erster Näherung mit $(T_0 + T_u)^3$ an. Damit wächst in der (15) entsprechenden Gleichung der Nenner stärker als der Zähler und die Empfindlichkeit nimmt mit steigendem Wärmeverluststrom bedingt durch steigende Heizspannung ab.

Durch diese Überlegungen wird auch der für alle Bolometer charakteristische Verlauf der Empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Heizspannung erklärt. Bei sehr kleiner Heizspannung wird der Wärmeverluststrom in der Hauptsache von der Wärmeleitung und der Konvektion getragen, während er bei großer Heizleistung und damit großem T_u in der Hauptsache von der Strahlung herrührt (vgl. (8)). Bei kleiner Heizspannung steigt daher die Empfindlichkeit fast linear mit ihr an, um nach Erreichung eines Maximums bei weiterer Steigerung der Heizspannung wieder abzufallen.

Um die größte Empfindlichkeitssteigerung oder anders ausgedrückt, den größeren Vakuumfaktor zu erhalten, wird es zweckmäßig sein, die Heizleistung L zu verkleinern. Dies ist aber nur möglich, wenn es sich um Versuche handelt, die keine besonders kurze Einstellzeit benötigen, so daß man im Hochvakuum arbeiten kann. Es lassen sich dann noch Strahlungen nachweisen, die Temperaturerhöhungen bis an die Grenze der statistischen Schwankungen hervorrufen.

Der Vakuumfaktor vergrößert sich mit der Verkleinerung der Auffangfläche (g. (28)). Dies ist verständlich, da bei 760 Torr der Wärmeverluststrom, der sich hier hauptsächlich aus der Wärmeleitung und der Wärmekonvektion zusammensetzt, nach Warburg¹⁰⁾ nur wenig von der Größe der Auffangfläche abhängig ist — sofern die Gefäßdimensionen groß genug sind —, während er im Hochvakuum, wo die Wärmestrahlung überwiegt, annähernd zu ihr proportional ist.

Ferner folgt aus (13), daß für Bolometer, die bei verschiedenen großer Fläche F gleiche Werte von R besitzen, die Empfindlichkeit im Strahlungsfeld proportional zu \sqrt{F} anwächst. Versuche zur Klärung von Fragen über den Einfluß von Größe und geometrischer Form des Streifens wurden nicht angestellt.

Im folgenden wird über Gleichstrommessungen mit dem Galvanometer berichtet, die bei Dauerbelichtung ausgeführt wurden, und über Wechselstrommessungen mit Rechteckimpulsen an geschwärzten Wismutbolometern.

II. Bestrahlung mit Gleichlicht

A. Bauart des Bolometers

Das benutzte Bolometer wurde durch Aufdampfen von Wismut auf eine Zelluloidfolie hergestellt. Als Halter der Folie dienten drei wie in Abb. 4 angeordnete und auf einen gläsernen Objektträger aufgeklebte Messingstreifen M_1 bis M_3 . Die Streifen M_1 bis M_3 sind gleichzeitig die Zuleitungselektroden für die

⁸⁾ M. Czerny u. a., a. a. O., Tabelle 1, S. 71.

⁹⁾ Die Linearität wird gestört durch die Abnahme von β mit steigender Temperatur.

¹⁰⁾ E. Warburg, G. Leithäuser u. Ed. Johannsen, Ann. Physik 24, 25 (1907).

beiden Bolometerzweige. Durch Verwendung einer Blende der Gestalt der Abb. 5a entstanden durch einen Aufdampfprozeß die beiden Bolometerzweige B_1 und B_2 . Nach Überlagerung einer zweiten streifenförmigen Blende Bl (Abb. 5b) wurde noch einmal Wismut aufgedampft, dabei aber nur die Schichtdicke der Elektroden E_1 bis E_3 verstärkt. Da vor dem Aufdampfvorgang die äußeren Ränder von M_1 bis M_3 von der Zelluloidschicht des Trägerhäutchens durch Schaben entfernt worden waren, standen nunmehr die Schichten E_1 bis E_3 in metallischem Kontakt mit M_1 bis M_3 .

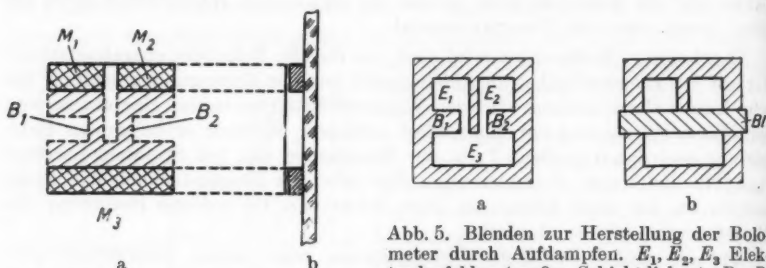


Abb. 4. Aufsicht (a) und Querschnitt (b) des Bolometerhalters. M_1 , M_2 , M_3 Elektrodenzuleitungen, B_1 , B_2 Bolometerzweige

Abb. 5. Blenden zur Herstellung der Bolometer durch Aufdampfen. E_1 , E_2 , E_3 Elektrodenfelder (großer Schichtdicken), B_1 , B_2 Bolometerfelder (kleiner Schichtdicken). a Blende zur Herstellung der Felder E_1 , E_2 , E_3 , B_1 und B_2 ; b Blende zur Schichtdickenverstärkung von E_1 , E_2 und E_3

Bereits in dieser Form konnten die auf Objektträgern befestigten Bolometer verwendet und untersucht werden. 1943/44 wurden einige zum Einbau in eine Röhre auf neue Sockel übertragen. Der Sockel bestand aus einem Glasrohr G (Abb. 6) mit plangeschliffenem Flansch F und aufgeklebten Messingelektroden M_1 bis M_3 (Abb. 7).

Vor dem Aufsetzen der metallbedampften Zelluloidhaut auf die Elektroden M_1 bis M_3 wurden diese mit alkoholversetztem Wasser angefeuchtet. Nach dem Trocknen haften die metallbedampften Zelluloidflächen fest auf den Elektroden bei gleichzeitiger Herstellung elektrischer Kontakte. Das nunmehr mit dem Bolometer versehene Glasrohr G (Abb. 6) konnte jetzt in den Glaskolben K mit Flansch Fl (Abb. 8) eingeführt werden, an dessen Innenwand es durch die eingepaßten Federringe R (Abb. 6) fest anlag. Für die Ableitungsdrähte des Bolometers waren in dem Boden des Kolbens K drei Öffnungen vorgesehen, die nach Durchführung der Drähte zugekittet oder zugeschmolzen wurden. Ein aufgesetzter, über den Boden des Kolbens geschobener Metallring Ri , der mit keramischem Sockelkitt vollgegossen wurde, und ein auf den Flansch Fl aufgeklebtes ultrarotdurchlässiges Fenster vervollständigten mit der äußeren Schwarzlackierung des gesamten Röhrenkolbens das Bolometerrohr.

Die nach obiger Beschreibung hergestellten Bolometerzweige B_1 und B_2 waren im allgemeinen nicht mit einem Fremdadсорber wie Ruß überzogen. An einigen Exemplaren vorgenommene zusätzliche Schwärzung erfolgte durch Überspannen einer mit aufgedampftem Wismutruß versehenen Zelluloidhaut oder durch unmittelbares Aufdampfen des Rußes auf die Zelluloidhaut, die bereits auf der Rückseite die Bolometerzweige trug.

Soweit es sich um die Versuche von 1943/44 handelte¹¹⁾, hatten die hergestellten Bolometer alle eine Empfängerfläche von $F_a = 0,17 \cdot 0,3 \text{ cm}^2 = 0,05 \text{ cm}^2$. Für die in den letzten Jahren ausgeführten Versuche betrug die Empfängerfläche $F_n = 0,4 \cdot 0,4 \text{ cm}^2 = 0,16 \text{ cm}^2$.

Die Trägerfolie aus Zelluloid war nach der bekannten Methode aus Zaponlack gewonnen. Ihre Dicke wurde mit Hilfe eines Köstersschen Interferenzprismas gemessen¹²⁾.

Aus der Zeit der ersten Messungen (1943/44) lag eine Skala für die Interferenzfarben der Zelluloidhäutchen in Abhängigkeit von der Dicke vor, so daß bei den neuen Messungen die Trägerschichtdicke auf Grund ihrer Farbe abgeschätzt werden konnte. Für die letzten Versuche betrug die Trägerschicht meist 40 μ .

Zwei übereinandergelegte gleichstarke Häutchen bildeten durch Ansprengen sofort eine einheitliche doppelt so starke Schicht. Ihre Farbe entsprach der dop-

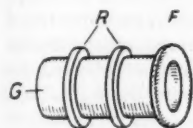


Abb. 6. Bolometerhalter G Glasrohr mit Flansch F , R Gummiringe



Abb. 7. Metallelektroden $M_1 - M_3$ zum Aufkitten auf den Flansch F

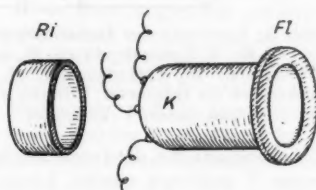


Abb. 8. Glaskolben K zur Kapselung des Bolometers. FI Flansch, Ri Metallring

pelten Dicke. Vor dem Aufdampfen waren die Häutchen glatt, nach dem Aufdampfen bildeten sich auf den mit Wismut bedampften Teilen jeweils senkrecht zu den Rändern kleine Falten.

Zur Schwärzung erhielten die Bolometer eine Rußaufdampfung aus Wismut, die nach Angaben von Pfund¹³⁾ bei 0,25 Torr durchgeführt wurden. Dieser Druck mußte genau eingehalten werden, da sich bereits bei wenig geringerem Druck eine metallisch glänzende Rußschicht niederschlug, dagegen bei nur wenig höherem Druck kein Niederschlag erfolgte. Beim Schwärzen wurde der Empfänger 4 cm über dem Schiffchen aufgehängt, gerade so hoch, daß die Trägerfolie keinen Schaden durch die Hitzeeinwirkung erlitt und andererseits die gasbeladenen Wismut-atome diese noch erreichten.

Erfahrungsgemäß erhöhte sich der Bolometerwiderstand durch Sammelkristallisation des Wismuts, und zwar in den ersten auf die Bedampfung folgenden Tagen bis zu 10% und in den folgenden Wochen weniger schnell aber fortlaufend. Diese Alterserscheinungen bedingen die zeitlich begrenzte Brauchbarkeit des Bi-Bolometers¹⁴⁾. Vielleicht ließe sich dem Übelstand durch geeignete Wärmebehandlung abhelfen. In den ersten zwei Monaten sind die mit demselben Empfänger durchgeführten Messungen innerhalb einer Woche mit einem Fehler von 1% reproduzierbar.

¹¹⁾ Die genaue Breite quer zur Stromrichtung lag zwischen 0,165 und 0,170 cm. $F_a = F_{alt}$, $F_n = F_{neu}$.

¹²⁾ G. C. Mönch, *Optik* 8, 550 (1951); 9, 75 (1952); U. Zoril, *Optik* 9, 449 (1952).

¹³⁾ A. H. Pfund, *Rev. sci. Instrum.* 1, 397 (1930); *J. Opt. Soc. Amer.* 23, 375 (1933).

B. Meßanordnung und Meßvorgang

1. Schaltung des Bolometers

Abb. 9 zeigt die Schaltung mit den Bolometern B_1 und B_2 . Diese entsprechen den Bolometerstreifen B_1 und B_2 mit den Elektroden M_1 bis M_3 in Abb. 4a und 5a. Den Brückenzeigen mit den Bolometern B_1 und B_2 liegen die Festwiderstände

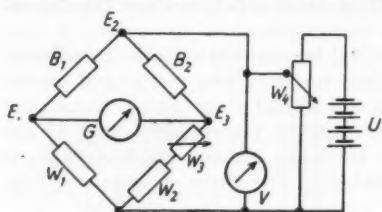


Abb. 9. Schaltung der Bolometerzeige B_1 und B_2 , W_1, W_2 Festwiderstände, W_3 variabler Widerstand, W_4 Potentiometer, E_1, E_2, E_3 Elektroden der Bolometer, U Batterie, G Galvanometer, V Voltmeter

W_1 und W_2 gegenüber. Als Strommeßinstrument stand (1944) ein Spiegelgalvanometer von Hartmann u. Braun zur Verfügung [Empfindlichkeit: 1 Skt. = $2,15 \cdot 10^{-6}$ Volt bei 100 Ohm innerem Widerstand] und ab 1948 ein schnellschwingendes Spiegelgalvanometer mit einer Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-6}$ Volt/mm \cdot m bei einem Eigenwiderstand von 22 Ohm.

Zum Abgleich der Brückenzeige (Einstellung des Galvanometers G auf Null) diene der veränderliche Widerstand W_3 . Die Batterie U lieferte die

Brückenspannung, die durch den Spannungsteiler W_4 verändert und durch das Voltmeter V gemessen werden konnte. Wird die Brücke bei niedriger Spannung V abgeglichen und diese dann allmählich erhöht, so ist mit Beginn der Brückenverstellung (Ausschlag des Galvanometers (G)) der Spannungswert feststellbar, von dem an der durch die Bolometer B_1 und B_2 fließende Strom diese wegen der Unsymmetrie meist unterschiedlich aufzuheizen beginnt.

2. Strahlungsquellen

Zur Absolutmessung wurde eine Hefnerlampe mit Blenden der Größe $1,4 \text{ mal } 5,0 \text{ cm}^2$ in 10 cm Entfernung von der Flammenmitte (nach Gerlach¹⁴) verwendet,

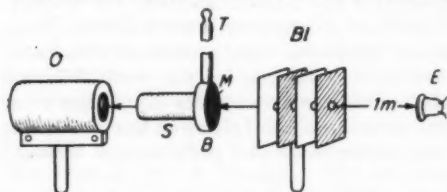


Abb. 10. UR-Strahlungsquelle. O elektrischer Ofen, M schwarze strahlende Fläche des Metallblockes B , S Metallstab zur Aufheizung von B durch Wärmeleitung, T Kontaktthermometer, Bl Blende von 1 cm^2 lichter Öffnung, E Empfänger. Im Bild ist der Stab S aus dem Ofen O herausgezogen gezeichnet

für die Relativmessungen häufig eine Glühlampe mit Wendel oder der aus 1 cm^2 schwarzer Fläche der Temperatur 100°C bestehende und in der Entfernung von 100 cm stehende Normalstrahler. In erster Näherung wurde er realisiert durch eine mit Terpentinruß geschwärzte Messingfläche M , wie in Abb. 10. Die Aufheizung der Fläche erfolgte durch Wärmeleitung über einen senkrecht zur abstrahlenden Fläche angesetzten Messingstab S ,

dessen Temperatur von dem ihn umgebenden elektrischen Ofen O erhöht wurde. Ein Kontaktthermometer T zeigte die Temperatur des Metallblockes B mit der

¹⁴ H. Meissner, Z. angew. Physik 4, 59 (1952).

¹⁵ W. Gerlach, Physik. Z. 14, 577 (1913); 21, 299 (1920).

Fläche M dicht unter der Oberfläche an und schaltete mit Hilfe eines Reglers die Stromstärke des elektrischen Ofens auf einen kleineren Wert, wenn die Temperatur 100°C überstieg. Bei Absinken der Temperatur unter 100°C wurde der ursprüngliche Stromwert wiederhergestellt. Um die Größe der abstrahlenden Fläche auf 1 cm^2 zu begrenzen, wurde die Blende Bl vorgesetzt, die aus 4 Einzelplatten mit je einem Loch von 1 cm^2 Größe bestand. Die erste dem Ofen zugewandte Platte bestand aus Pappe (schlechter Wärmeleiter), die nächste aus Messing (guter Wärmeleiter), dann folgte eine Papp- und schließlich noch eine Messingplatte. Durch diese Anordnung wurde abwechselnd die Wärme zurückgehalten und verteilt.

Da die Fläche von 1 cm^2 bei 100°C in 1 m Abstand eine Energie ausstrahlt, die von einem Bolometer nur mit einem nicht immer zur Verfügung stehenden Galvanometer höchster Empfindlichkeit festgestellt werden kann, wurde gelegentlich eine bedeutend größere Einheit benutzt. Diese Strahlungsquelle größerer Energie bildete die geschwärzte, als Teil einer Hohlkugel von 50 mm Radius ausgebildete Fläche M in Abb. 10 von 100°C und 54 mm Durchmesser. Die Empfänger wurden in den Mittelpunkt der Kugelschale gestellt. Da die Größe der Elemente zwischen 1 und 10 mm liegt, war die Bedingung, daß die Ausdehnung des Bolometers gegenüber dem Radius vernachlässigt werden kann, hinreichend erfüllt. Für Relativmessungen wurde auch einfach eine kleine Glühlampe verwendet.

C. Theoretische Ergänzungen

Das Bolometer wird für eine Zeit der Dauer t' mit gleichbleibender Energie bestrahlt.

Für diesen Fall geht die Beziehung (9) über in (16) mit den Lösungen (17) bis (19).

$$\bar{W}_k \frac{d\Delta T}{dt} + \bar{W}_v \Delta T = Q \quad \begin{cases} Q = \text{const. für } 0 \leq t \leq t' \\ Q = 0 \text{ für } t < 0 \text{ und } t' < t \leq \infty \end{cases} \quad (16)$$

$$\Delta T = \frac{Q}{\bar{W}_v} \left(1 - e^{-\frac{\bar{W}_v \cdot t}{\bar{W}_k}} \right) = \frac{Q}{\bar{W}_v} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{für } 0 \leq t \leq t' \quad (17)$$

oder ausgeschrieben:

$$\Delta T = \frac{Q}{W_{v1} + 4\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)(T_0 + T_u)^3} \left(1 - e^{-\frac{W_{v1} + 4\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)(T_0 + T_u)^3}{W_{kk} + W_{kg}} \cdot t} \right) \quad (18)$$

und

$$\Delta T = \frac{Q}{\bar{W}_v} \cdot e^{-\frac{t+C}{\tau}} \quad \text{für } t' < t \leq \infty. \quad (19)$$

Hierin bedeuten C die Abkürzung für

$$C = -\left(\tau \ln \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}} \right) + t' \right) \quad (20)$$

und

$$\tau = \frac{\bar{W}_k}{\bar{W}_v} = \frac{W_{kk} + W_{kg}}{W_{v1} + 4\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)(T_0 + T_u)^3} \quad \text{die Zeitkonstante.} \quad (21)$$

Zeitkonstante τ und Einstellzeit τ_e sind nach der Beziehung (17) definiert. Unter Einstellzeit τ_e wird die Zeit verstanden, in der sich eine Temperaturerhöhung ΔT

des Bolometers bzw. ein Ausschlag beobachten läßt, der von der Endeinstellung $(\Delta T)_{\infty}$, d. i. ΔT für $t \rightarrow \infty$ um $\frac{1}{e^2 \pi} (\Delta T)_{\infty}$ entfernt ist¹⁶⁾.

Ist der Endwert $(\Delta T)_{\infty}$ erreicht und wird die Einstrahlung nunmehr unterbrochen, dann sinkt die Temperatur wieder. Für diesen Abklingvorgang ist die Zeitkonstante $t = \tau$ als die Zeit definiert, in der der Vollausschlag auf $\frac{1}{e}$ seines Wertes gesunken ist¹⁷⁾. Zwischen diesen Größen τ_e und τ besteht also die Beziehung:

$$\tau_e = 2\pi\tau = 2\pi \frac{\bar{W}_k}{W_v} = 2\pi \frac{W_{kk} + W_{kg}}{W_{vi} + 4\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)(T_0 + T_u)^3}. \quad (22)$$

Für Messungen, bei denen ein zeitlich konstanter Energiestrom auf das Bolometer fällt, kann man solange warten, bis der Endausschlag

$$(18) \quad \Delta T_{\infty} = \frac{Q}{W_{vi} + 4\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)(T_0 + T_u)^3} \text{ für } t = \infty$$

mit genügender Annäherung erreicht ist. In diesem Fall erhält man bei möglichst gering aufgeheiztem Bolometer ($T_u \rightarrow 0$) die größte Temperaturerhöhung ΔT_{∞} , denn dann hat der Wärmeverluststrom $W_{vi} + 4\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)(T_0 + T_u)^3$ bei sonst gleichen Bedingungen seinen kleinsten Wert. Das bedeutet aber nicht, daß auch der Ausschlag des Galvanometers in der Brücke bei $T_u \rightarrow 0$ ein Maximum

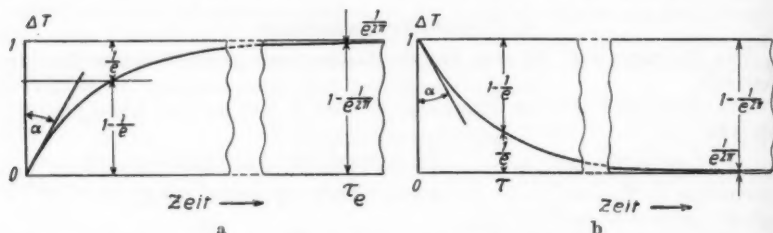


Abb. 11. Exponentieller Anstieg (a) bzw. Abfall (b) der Bolometererwärmung bei bzw. nach der Einstrahlung. τ_e Einstellzeit, τ Zeitkonstante, e Basis des natürlichen Logarithmus

zeigt, denn der Galvanometeraussschlag ist noch der Heizspannung proportional, daher hat der Ausschlag des Brückengalvanometers bei endlichem kleinem T_u einen maximalen Wert.

Die Abb. 11 zeigt den zeitlichen Anstieg der Bolometertemperatur bei konstanter Einstrahlung und den Abfall der Temperatur bei Einstellung der Be-

¹⁶⁾ Für diesen Fall gilt nach (17) und (21) wegen $t = 2\pi\tau$ die Beziehung $\Delta T = \frac{Q}{W_v} \left(1 - \frac{1}{e^{2\pi}}\right)$, d. h. bis zur Zeit $t = \tau_e$ ist die Einstellung bis auf 99,8% des Endwertes $(\Delta T)_{\infty} = \frac{Q}{W_v}$ (für $t \rightarrow \infty$) gestiegen (s. Abb. 11).

¹⁷⁾ Für $t = \tau$ geht (17) über in $\Delta T = \frac{Q}{W_v} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$, d. h. um diesen Betrag ΔT ist die Einstellung gesunken und hat den e -ten Teil des ursprünglichen Vollausschlages erreicht (s. Abb. 11).

strahlung. Der Ordinatenmaßstab ist so gewählt, daß bei unendlich langer konstanter Einstrahlung der Endausschlag $\frac{Q}{W} = 1$ wird. Die Steilheit des Kurvenanstieges wird (nach (16)) durch den Ausdruck

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{Q - \bar{W}_e \Delta T}{\bar{W}_k} \quad \text{oder an der Stelle } t = 0 \quad (23)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{Q}{\bar{W}_k} \quad \text{bestimmt.} \quad (24)$$

Die ausgezogene Kurve umrandet die Fläche F der Größe:

$$F = \frac{Q}{\bar{W}_e} \cdot t. \quad (25)$$

D. Meßergebnisse

1. Absolute Empfindlichkeit

Die Empfindlichkeit des Bolometers ohne Schwärzung hat für Schichtdicken mit einem Quadratwiderstand von rund 190 Ohm wie eingangs ausgeführt ein Maximum. Das belegen die in Abb. 12 zusammengetragenen Messungen an den Bolometern B 1 bis B 5, B 10 bis B 14 und B I bis B VI, deren Konstruktionsdaten die Tabelle 1 enthält. Bei der hier vorliegenden Gleichlichtbestrahlung ist die Empfindlichkeit nicht von der Dicke der Trägerfolie für die Wismutschicht abhängig. Die Abnahme der Empfindlichkeit bei Wismutschichten mit kleineren Quadratwiderständen als 190 Ohm ist durch die erhöhte Durchlässigkeit, beim Quadratwiderstand größer als 190 Ohm durch gesteigertes Reflexionsvermögen bedingt.

In den hier vorkommenden Grenzen hat die Dicke selbst — also etwa die Wärmekapazität der Metallschicht — bei Gleichlichtbestrahlung genau so wenig einen Einfluß auf die Empfindlichkeit, wie verschieden starke Trägerfolien. Dieser Tatsache entspricht auch die in (17) angegebene Lösung; nach genügend langer Zeit ist das Glied mit der e -Funktion

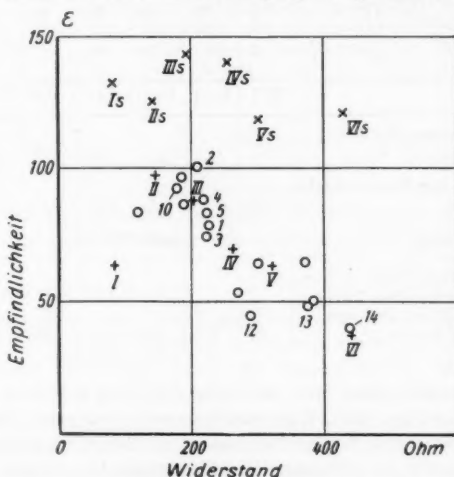


Abb. 12. Empfindlichkeit ε in Skalenteilen des benutzten Galvanometers bei konstanter Dauerbeleuchtung bei 10^{-4} Torr in Abhängigkeit vom Widerstand R in Ohm der einzelnen Bolometer. Die durch schräg gestellte Kreuze gekennzeichneten Bolometer waren geschwärzt, alle anderen hatten eine blanke Oberfläche*). Is bis VIs sind die berußten Bolometer I bis VI

*) Die nicht näher bezeichneten in Abb. 12 aufgeführten Bolometer hatten alle eine Trägerschicht von $0,04 \mu$ Dicke und blanke Oberflächen. Sie unterscheiden sich nur in ihren Widerständen. B 1 und B 11 sind identisch.

Tabelle 1

Zusammenstellung der Daten der verwendeten Bolometer (alle Bolometer hatten eine Empfängerfläche von $0,4 \times 0,4 \text{ cm}^2$). Die in Klammern stehenden Werte für B III sind aus Meßwerten für B I durch Multiplikation mit 87/79 berechnet worden

	B I	B 2	B 3	B 4	B 5	B 10	B 11	B 12	B 13	B 14	B III	B IV
Widerstand der Bi-Schicht in Ohm . . .	222	212	216	214	220	177	222	271	376	439	200	180
Dicke der Trägerschicht in μ	0,04	0,08	0,16	0,24	0,32	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
Berechnete Wärmekapazität ¹⁸⁾ der gesamten Schicht in $10^{-6} \text{ Wattsec/cm}^2 \text{ Grad}$	15,1	25,5	47,4	71,2	94,9	16,3	15,1	14,3	13,5	13,1	15,5	24
Oberfläche	ungeschwärzt											a ¹⁹⁾
Empfindlichkeit in Skalentellen (vgl. 2 DI) für $T_a = 4^\circ \text{ C}$ bei	760 Torr	23	30	34	30	26	34	23	19	15	15	(25)
	10 "	24	30	34	30	26	34	24	19	15	15	(26)
	1 "	27	31	35	31	27	—	27	—	—	—	(30)
	10^{-1} "	31	36	50	42	40	47	31	25	22	25	(34)
	10^{-2} "	60	78	62	74	62	73	60	39	—	30	(66)
	10^{-4} "	79	100	73	89	84	92	79	44	49	40	87
	B I	B II	B III	B IV	B V	B VI	B Is	B IIs	B IIIs	B IVs	B Vs	B VIs
Widerstand der Bi-Schicht in Ohm. . .	84	144	200	258	319	440	82	141	189	253	300	420
Dicke der Trägerschicht in μ	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
Oberfläche	ungeschwärzt						geschwärzt					
Empfindlichkeit in Skalentellen (vgl. 2 DI) für $T_a = 4^\circ \text{ C}$ bei 10^{-4} Torr	63	97	87	69	63	37	121	118	143	140	125	130

abgeklungen, und der Ausschlag wird nur noch durch die eingestrahelte Energie und den spez. Wärmeverluststrom bestimmt. Das läßt sich auch experimentell beim Berußen der Bolometer, die hier durch Aufdampfen von Wismutruß unmittelbar auf die Wismutschicht vorgenommen wurde, erkennen. Nach Berußung steigt die Absorptionsfähigkeit der Bolometerstreifen und damit die Empfindlichkeit (Abb. 12) um mindestens 50%. Das Maximum bei 190 Ohm ist für berußte Strahlungsempfänger verschwunden.

Bei den hier (Abb. 12) durchgeführten Messungen betrug die auffallende Energie pro cm^2 und pro sec $16,2 \text{ HK}$ (in 1 m Abstand) $= 15,3 \cdot 10^3 \text{ erg/sec cm}^2$, der Luftdruck $p = 10^{-4} \text{ Torr}$, die Heizleistung $L = 1,89 \cdot 10^{-3} \text{ Watt/cm}^2$. Die Galvanometeraus schläge ϵ sind die Ausschläge eines Schnellschwingers mit einer Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-6} \text{ Volt/mm} \cdot \text{m}$ und einem Eigenwiderstand von 22 Ohm.

¹⁸⁾ Die Wärmekapazität wurde aus den von Czerny und Mitarbeitern (a. a. O.) angegebenen spezifischen Wärmen berechnet, dabei die des Wismuts zu $0,12 \text{ Wattsec/g Grad}$ und die der Trägerschicht zu $2,0 \text{ Wattsec/g Grad}$, angenommen.

¹⁹⁾ geschwärzt.

Die absolute Empfindlichkeit des Bolometers B IIIs für 10^{-4} Torr bei Bestrahlung mit einer Hefnerlampe ergab sich umgerechnet und unter der Annahme einer 60proz. Absorption der Strahlung durch Glas und Luft für $L = 1,89 \cdot 10^{-3}$ Watt/cm², was einer Aufheizung von $T_a = 4^\circ\text{C}$ Übertemperatur entspricht, zu $2,25 \mu\text{Volt}/\mu\text{Watt}$ (bei einer Aufheizung auf gleiche Übertemperatur — das entspricht einer Heizleistung von $2,16 \cdot 10^{-3}$ Watt/cm² — und 760 Torr beträgt die Empfindlichkeit $0,68 \mu\text{Volt}/\mu\text{Watt}$).

Die kleinste nachweisbare Strahlungsdichte, bei der sich Nutz- zu Störausschlag wie 3:1 verhalten, wurde mit dem Zernicke-Galvanometer Zb, das bei einem inneren Widerstand von 10 Ohm, einen äußerem Widerstand von 50 Ohm und einer Schwingungsdauer von 3 sec eine Empfindlichkeit von $15 \cdot 10^{-8}$ Volt/mm besitzt, gemessen. Sie betrug beim Bolometer B IIIs bei einer Heizleistung von $2,16 \cdot 10^{-3}$ Watt/cm² und bei einem Druck von 760 Torr ($T_a = 4^\circ\text{C}$) $18,4 \text{ erg/sec cm}^2$. Hieraus ergibt sich bei 10^{-4} Torr und $1,89 \cdot 10^{-3}$ Watt/cm² ($T_a = 4^\circ\text{C}$) eine Strahlungsdichte von $5,6 \text{ erg/sec cm}^2$.

Dabei war die Proportionalität des Galvanometerausschlages mit der eingestrahlten Energie gewährleistet, wie Abb. 13 zeigt. Die Größe der Energie wurde bei dem Versuch durch den Abstand einer Glühlampe von dem Empfänger eingestellt.

2. Druckabhängigkeit

Die Empfindlichkeit in Abhängigkeit vom Druck am gleichen geschwärzten Bolometer gemessen sowohl für $T_a = \text{konst.}$ als auch für $L = \text{konst.}$ zeigt Abb. 14.

Mit abnehmendem Druck steigt der Meßausschlag des Anzeigerätes und somit die Empfindlichkeit des Bolometers. Das Bolometer stellt bei diesem Versuch gewissermaßen ein Pirani-Manometer vor und die Druckabhängigkeitskurve entspricht der Eichkurve dieses Hitzdrahtmanometers. Bei der Aufnahme der Kurve kann nun mit verschiedenen Druckeinstellungen entweder die Übertemperatur des Bolometers T_a konstant gehalten werden oder die Heizleistung $L = \frac{V^2}{R F}$ wird auf gleiche Werte eingestellt. Je nach der Vorbedingung $T_a = \text{konst.}$ oder $L = \text{konst.}$ ergibt sich die eine oder die andere Kurve in Abb. 14, und zwar für $T_a = 4^\circ\text{C}$ und $L = 1,89 \cdot 10^{-3}$ Watt/cm².

Die Konstanzhaltung der Übertemperatur wurde hierbei folgendermaßen erreicht: Einer bestimmten Heizleistung bei einem bestimmten Druck entspricht eine bestimmte Widerstandsänderung des Wismutstreifens und dieser einer aus Abb. 2 erscheinbaren Übertemperatur²⁰⁾. Bei der Veränderung des Druckes muß nun

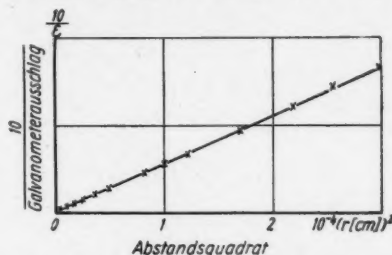


Abb. 13. Reziproker Wert des Galvanometerausschlages ϵ in Skalenteilen in Abhängigkeit vom Quadrat der Entfernung r der Lichtquelle in cm. Versuchsobjekt: B IIIs (geschwärztes Bolometer) bei 10^{-4} Torr und $T_a = 4^\circ\text{C}$

²⁰⁾ Da die Abb. 2 die Czernyschen Messungen wiedergibt, ist es durchaus möglich, daß die Materialkonstanten für die hier benutzten Bolometer nicht gültig sind und demzufolge die Übertemperatur nicht genau 4°C betrug. Dieser Umstand ist unwesentlich, da es nur darauf ankam, in allen Fällen T_a konstant zu halten.

die Heizleistung so groß gewählt werden, daß die ihr entsprechende Widerstandsänderung konstant bleibt.

Die Empfindlichkeit steigt mit abnehmendem Druck in der Zahlenfolge der Tabelle 2. Diese Steigerung der Empfindlichkeit mit der Evakuierung wird hervor-

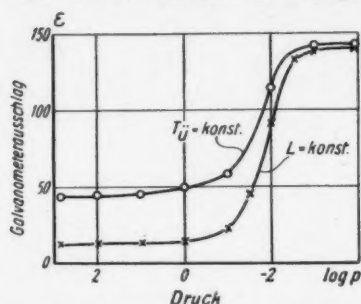


Abb. 14. Empfindlichkeit (Galvanometerausschlag) ε in Skalenteilen bei konstanter Übertemperatur $T_u = 4^\circ\text{C}$ und bei konstanter Heizleistung $L = 1,89 \cdot 10^{-3}$ Watt/cm² in Abhängigkeit vom Druck p des umgebenden Gases in Torr. Versuchsobjekt: B IIIs (geschwärztes Bolometer)

gerufen durch die Abnahme des Wärmeverluststromes, wie Formel (18) verlangt.

Nach den oben angeführten Messungen Czernys²¹⁾ wird der Wärmeverluststrom bei mittleren und höheren Drucken hauptsächlich von der Wärmeleitung und -konvektion des Gases getragen, während bei niedrigen Drucken die Wärmestrahlung dominiert. Eine entsprechende Meßreihe, für konstante Übertemperatur ($T_u = 4^\circ\text{C}$) am geschwärzten Bolometer B IIIs durchgeführt, bestätigte obige Schlüsse (Tabelle 2).

Man ersieht somit aus der oberen Kurve und der Tabelle 2 die durch Evakuierung erreichbare Empfindlichkeitssteigerung bei gleicher Störanfälligkeit ($T_u = \text{const.}$). Sie beträgt in diesem Falle etwa das 3,2fache.

Tabelle 2

Heizleistung und Wärmeverluststrom \bar{W}_e und Empfindlichkeit für das geschwärzte Bolometer B IIIs und $T_u = 4^\circ\text{C}$ in Abhängigkeit vom Druck

Luftdruck p (Torr)	Betriebs- spannung \bar{V} (Volt)	Heizleistung $L = \frac{V^2}{R F}$ in 10^{-2} Watt cm ²	Wärme- verluststrom $\bar{W}_e = \frac{L}{T_u}$ in 10^{-4} Watt cm ² grad	Wärme- kapazität ²²⁾ $\bar{W}_k = \frac{0,277}{v_{1/2}} \bar{W}_e$ in 10^{-6} Wattsec. cm ² grad	Empfindlich- keit ε (Gal- vanometer- ausschlag in sec.)
760	0,81	2,16	54	187	45
100	0,8	2,1	52,5	69	45
10	0,79	2,06	50,2	54	45,2
1	0,72	1,7	42,5	53	48
10^{-1}	0,62	1,26	31,5	52	58
10^{-2}	0,3	0,296	7,4	52	114,2
10^{-4}	0,24	0,189	4,73	52	143

Der Faktor \bar{V} , mit dem man die bei 760 Torr gemessene Temperaturerhöhung ΔT_{760} multiplizieren muß, um die Temperaturerhöhung ΔT_{vak} bei gleicher Einstrahlung zu bekommen, soll mit Vakuumfaktor bezeichnet werden. Dieser

²¹⁾ M. Czerny u. Mitarbeiter a. a. O

²²⁾ Wegen $v_{1/2}$ siehe III C.

Faktor ist definiert durch:

$$\bar{V} = \frac{\Delta T_{\text{vak}}}{\Delta T_{760}} = \frac{(W_r)_{760}}{(W_r)_{\text{vak}}} \quad (26)$$

$$\bar{V} = \frac{(W_{eg} + W_{ek} + 8\sigma(T_0 + T_a)^3)_{760}}{(W_{eg} + W_{ek} + 8\sigma(T_0 + T_a)^3)_{\text{vak}}} \quad (27)$$

Für das Vakuum kann W_{eg} vernachlässigt werden, die anderen Größen unterscheiden sich nicht von den entsprechenden bei 760 Torr. Man bekommt also:

$$\bar{V} = \frac{(W_{ek})_{760}}{W_{ek} + 8\sigma(T_0 + T_a)^3} + 1. \quad (28)$$

In den Formeln (27) und (28) wurde $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ gesetzt.

Ist der Wärmeverluststromanteil W_{ek} , der durch die Konstruktion bedingt ist, gegenüber W_{eg} groß oder von gleicher Größenordnung, so wird \bar{V} in der Größenordnung von 1–2 liegen. Dieser Fall tritt ein bei dicken Träger- und Metallschichten sowie in solchen Fällen, bei denen die beleuchtete Stelle des Strahlungsempfängers sehr dicht an einer Elektrode liegt, so daß dadurch W_{ek} sehr groß wird.

Sind dagegen Träger- und Metallschicht sehr dünn, oder besteht die empfindliche Schicht aus einem sehr schlecht wärmeleitenden Material, so kann $(W_{eg})_{760}$ gegenüber W_{ek} sehr groß werden (10–100).

Diese Zunahme der Temperaturerhöhung ΔT_{vak} bei Vakuumempfängern ist nicht gleichbedeutend mit einer gleichen Zunahme der Empfindlichkeit. Vielmehr ist nach (13) die Empfindlichkeit eines Bolometers proportional $\sqrt{1/W_e}$ und damit bei konstanter Einstrahlung Q proportional $\sqrt{\Delta T}$. Bei Thermoelementen ist die Empfindlichkeit proportional ΔT , so daß man hier einen größeren „Vakuurfaktor für die Empfindlichkeit“ zu erwarten hat. (Vgl. 2. Mitteilung über Strahlungsempfänger S. 175.)

Im allgemeinen wird eine Vergrößerung der Empfindlichkeit durch Vergrößern von \bar{V} auch mit einer Vergrößerung der Trägheit des Empfängers parallel gehen, von einer Leistungssteigerung kann dann nur bedingt gesprochen werden.

Es ist angebracht, den Bolometerstreifen nur soweit aufzuheizen, wie die Störanfälligkeit des Instrumentes noch hinreichend klein bleibt. Die Störanfälligkeit kann bei kleinem T_a in erster Annäherung als linear mit der Übertemperatur wachsend angesetzt werden.

III. Bestrahlung mit Rechteckimpulsen

A. Bauart des Bolometers

Die für die Wechsellichtversuche benutzten Bolometer hatten den gleichen wie unter II A beschriebenen Aufbau, nur daß die Bolometerstreifen stets eine Empfängerfläche von $F = 0,4 \cdot 0,4 \text{ cm}^2 = 0,16 \text{ cm}^2$ aufwiesen.

B. Meßanordnung

1. Meßvorrichtung

Das Bolometer befand sich wie bei den Versuchen mit Dauerbelichtung in einer Brücke, deren Schaltung Abb. 9 zeigt.

Als Meßinstrument diente ein AEG-Kathodenstrahloszillograph. Zur Erzeugung der notwendigen Ablenkspannung mußte die am mittleren Brückenast

liegende Spannung um etwa das 10^4 -fache verstärkt werden. Um eine frequenzunabhängige Verstärkung zu erhalten, wurde an die Brücke eine Wechselspannung gelegt und dazu die Spannungsquelle U (Abb. 9) durch einen Tongenerator ersetzt. Die Frequenz der Wechselspannung — die Trägerfrequenz — war gegenüber der Wechsellichtfrequenz hinreichend groß, aber auch nur so groß, daß in der Brücke durch Selbstinduktion keine merkliche Phasenverschiebung auftrat. Sie lag etwa zwischen 100 Hz und 1200 Hz.

An die vertikalen Ablenkplatten der Braunschen Röhre wurde die am mittleren Brückenweig liegende verstärkte Spannung angelegt, an die waagerechten Platten irgendeine geeignete Kippschwingung. Die Abweichung der Vertikalablenkung des Kathodenstrahls von der Linearität ließ sich ermitteln und bei der Auswertung berücksichtigen.

2. Wechsellichterzeugung

Das auf den Strahlungsempfänger fallende Licht kam von einer Wolfram-Bandlampe und wurde fortlaufend in Rechteckimpulse vom Tastverhältnis 1:1



Abb. 15. Benutzte Sektorenscheiben zur Erzeugung von Wechsellicht mit den Abblendungen 1, 4 und 12 je Umdrehung

zerlegt. Das besorgte eine Scheibe mit ausgeschnittenen Sektoren, die hinter einem Spalt den Strahlengang unterbrach. Die Drehgeschwindigkeit des Motors ließ sich im Verhältnis 1:10 regeln. Das benötigte Frequenzspektrum erstreckte sich von 3 Hz bis 200 Hz. Es wurden drei Scheiben mit 1, 4 und 12 Sektoren angefertigt (Abb. 15). Die Rand-

steilheit der Rechteckimpulse nahm mit wachsender Sektorenzahl etwas ab, was sich jedoch nicht störend bemerkbar machte. Abb. 16 zeigt einen mit der 12-Sektorenscheibe hergestellten 50 Hz-Impuls, aufgenommen mit einer bis zu etwa 10000 Hz trägeheitslos arbeitenden gasgefüllten Photozelle und aufgezeichnet auf einem Kathodenstrahloszillographen. Da die Bandlampe am Wechselstromnetz lag, ergab sich eine auf Abb. 16 (oberer Kurventeil) als voller Schwingungszug erkennbare leichte Welligkeit der abgegebenen Lichtintensität, die jedoch im Verhältnis zu der im Mittel ausgestrahlten Intensität klein war. Die Welligkeit einer Bandlampe ist erheblich kleiner als die einer gewöhnlichen Glühlampe²³⁾.



Abb. 16. Aufnahme einer Rechteckimpulscurve auf dem Fluoreszenzschirm einer Kathodenstrahl-Oszillographenröhre

3. Meßverfahren

Solange das Bolometer noch nicht bestrahlt aber die Brücke abgeglichen ist, erscheint auf dem Fluoreszenzschirm der Braunschen Röhre ein waagerechter Strich (Nullage) des durch die Kippfrequenz seitlich abgelenkten Kathodenstrahles. Nach Bestrahlung des Bolometers mit konstanter Energie weicht der

²³⁾ Vgl. G. C. Mönch, Optik, im Erscheinen.

Kathodenstrahl von dieser Nullage in beiden Richtungen ab und gibt so den Meßausschlag an. Die nach beiden Seiten gleichgroßen Ausschläge bilden zwei neue Linien, die gleichzeitig die umhüllenden Geraden zu den Kurvenzügen der Trägerfrequenz sind, deren Amplitude gleich dem Ausschlag (vgl. Abb. 49) ist. Bei allen Versuchen wurde durch Regulierung der Intensität der Einstrahlung die Amplitude gleich groß gewählt und das Bild des Leuchtschirmes zur Auswertung photographisch festgehalten.

C. Theoretische Ergänzungen

Für den Fall des abgehackten Wechsellichtes mit gleichlanger Belichtungszeit und Belichtungspause muß die Differentialgleichung (9) in folgender Form geschrieben werden:

$$\bar{W}_k \frac{d\Delta T}{dt} + \bar{W}_v \Delta T = 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (29)$$

und

$$\bar{W}_k \frac{d\Delta T}{dt} + \bar{W}_v \Delta T = \frac{Q}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi (2n-1)} \cos [(2n-1) \omega t] \quad \text{für } t \geq 0. \quad (30)$$

Dabei stellt die rechte Seite die Fourierzerlegung der vorgegebenen Rechteckkurve $Q(\omega t)$ dar:

$$Q(\omega t) = \begin{cases} Q & \text{für } -\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Wegen $\Delta T = 0$ für $t = 0$ wird (17) zu

$$\Delta T = \frac{Q}{2\bar{W}_v} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \frac{\bar{W}_v^2}{\bar{W}_v^2 + [(2n-1)\bar{W}_k]^2} \right] e^{-\frac{\bar{W}_v}{\bar{W}_k} t} \right\} + \frac{2Q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos [(2n-1) \omega t - \varphi_{2n-1}]}{(2n-1) \sqrt{\bar{W}_v^2 + [(2n-1)\bar{W}_k]^2}} \quad (31)$$

mit

$$\varphi_{2n-1} = \arctg \frac{(2n-1) \omega \bar{W}_k}{\bar{W}_v}. \quad (32)$$

Aus (31) folgen für $\omega = 2\pi\nu = 0$ die bei Czerny mit (13), (14), (15) und (18) bezeichneten Gleichungen.

In (31) ist der erste Summand nach Abklingen der e -Funktion, die den Einschaltvorgang wiedergibt, eine Konstante ($Q/2\bar{W}_v$) und daher für unser Meßverfahren unwesentlich. Für uns wichtig ist der zweite Summand; dieser gibt die Temperaturschwankung $\theta(\omega)$ an, wenn das Bolometer mit Rechteckimpulsen der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ bestrahlt wird. Die Temperaturschwankung $\theta(\omega)$ setzt sich dabei aus den einzelnen zu den Frequenzen $\omega, 3\omega, \dots, (2n-1)\omega$ gehörigen Amplituden

$$\theta_n(\omega) = \frac{2Q}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \frac{1}{\sqrt{\bar{W}_v^2 + [(2n-1)\bar{W}_k]^2}} \quad (33)$$

mit den Phasenverschiebungen $\cos [(2n-1) \omega t - \varphi_{2n-1}]$ zusammen.

Für den rein periodischen Fall bei Einstrahlung mit Licht sinusförmigen Intensitätsverlaufes geht die Beziehung (33) über in

$$\theta(\omega) = \frac{Q}{2} \frac{1}{\sqrt{W_e^2 + \omega^2 W_k^2}} \quad (\text{Formel 11 bei Czerny}). \quad (34)$$

(Dazu muß in (33) statt $(2n-1)\omega$ die Frequenz ω gesetzt und die $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ gebildet werden. Wird in (33) nur das erste Glied $n=1$ genommen, dann ergibt sich (34) aber mit der Amplitude $\frac{2Q}{\pi}$).

Die Halbwertsfrequenz $\nu_{1/2} = \frac{\omega_{1/2}}{2\pi}$ berechnet sich nun nach dem Ansatz

$$\theta(\omega_{1/2}) = \frac{\theta(0)}{2} \quad (35)$$

(d. i. der halbe Wert von θ für $\omega_0 = 0$, wenn $\theta(0)$ die Amplitude (Meßausschlag) für $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 0$ ist), aus der Beziehung

$$\frac{Q}{4W_e} = \frac{Q}{2} \frac{1}{\sqrt{W_e^2 + (2\pi\nu_{1/2})^2 W_k^2}}, \quad (36)$$

die aus (31) und (35) folgt, zu

$$\nu_{1/2} = \frac{\sqrt{3} W_e}{2\pi W_k} = \frac{\sqrt{3}}{\tau_s}. \quad (37)$$

Über die Berechtigung, diese Beziehung auch für Rechteckimpulse anzuwenden, vgl. Fußnote ²⁹⁾ und IV.

D. Meßergebnisse

1. Empfindlichkeit und Wechsellicht-Frequenzabhängigkeit ungeschwärzter Bolometer

Die Empfindlichkeiten der ungeschwärzten Bolometer B 1 bis B 5, B 10 bis B 14 und B 1 bis B VI für $\nu = 0$ enthält Tabelle 1 und Abb. 12. Dabei sind die Bolometer B 1 bis B 5 durch die Dicke der Trägerfolie, B 10 bis B 14 und B 1 bis B VI durch die Dicke der Metallschicht entsprechend den Angaben in Tabelle 1 unterschieden. Die charakteristische Abhängigkeit des Meßausschlages (Kathodenstrahlamplitude) sowohl von der Frequenz des Wechsellichtes als auch von vier verschiedenen Drucken für B 1 gibt Abb. 17 wieder.

Die weiteren Messungen über die Abhängigkeit der Amplitude von der Wechsellichtfrequenz wurden alle relativ zu dem Amplitudenwert 100 für $\nu = 0$ bezogen und als Kurvenzüge in den Abb. 18 bis 24 für fünf verschiedene Bolometer B 1 bis B 5 mit

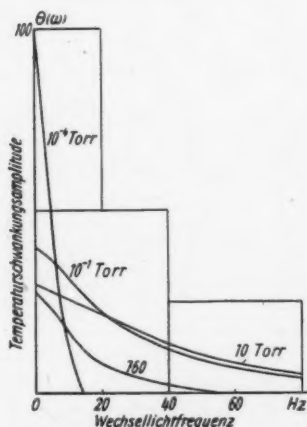


Abb. 17. Abhängigkeit der Temperaturschwankungsamplitude $\theta(\omega)$ von der rechteckig modulierten Wechsellichtfrequenz $\nu = \omega/2\pi$ in Hz bei verschiedenen Drucken. Versuchsobjekt: B 1 = B 11 (ungeschwärztes Bolometer) bei $T_a = 4^\circ\text{C}$. Bolometerfläche $0,4 \times 0,4 = 0,16\text{ cm}^2$

unterschiedlichen Trägerfoliendicken und für sieben verschiedene Drucke abgebildet.

Das Elektronenstrahlbild auf dem Leuchtschirm des Oszillographen bei einer Lichtfrequenz von 12,5 Hz zeigt Abb. 25, für 48 Hz Abb. 26.

Die Abb. 27 bis 30 ergänzen das Kurvenmaterial für die Bolometer B 10 bis B 14 mit gleichstarker Trägerfolie aber verschiedener Wismutschichtdicke, über deren Konstruktionsdaten gleichfalls die Tabelle 1 Auskunft gibt.

Für Wechsellicht bleibt auch die bei Gleichlicht durch Beleuchtung mit einer Glühlampe erhaltene lineare Abhängigkeit des Meßausschlages von der einfallenden Energie (Abb. 13) erhalten, solange die Frequenz konstant bleibt.

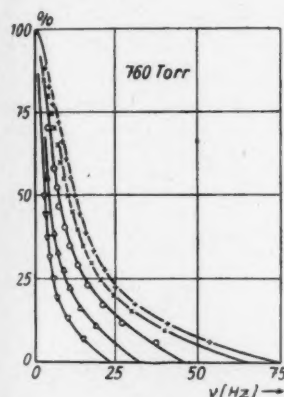


Abb. 18

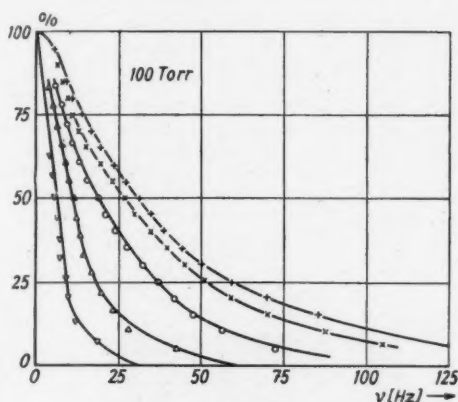


Abb. 19

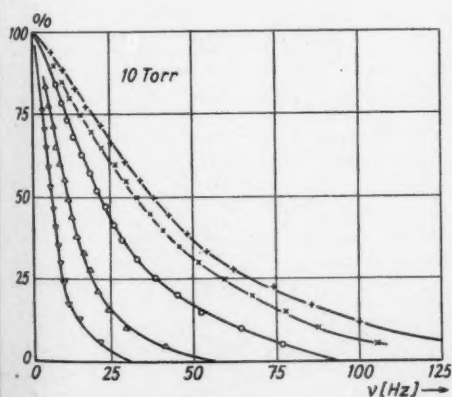


Abb. 20

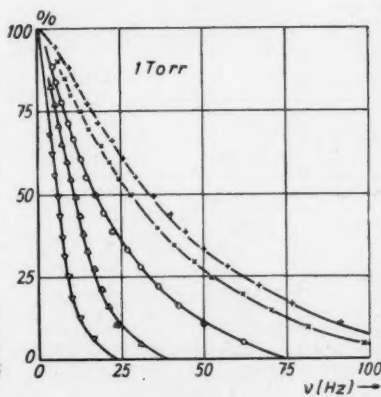


Abb. 21

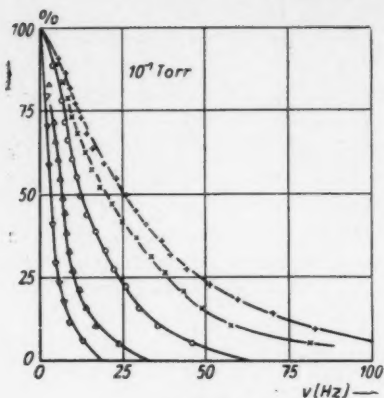


Abb. 22

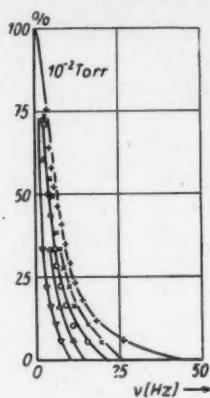


Abb. 23



Abb. 24

Abb. 18 bis 24. Abhängigkeit der relativen Temperaturschwankungsamplitude $\theta(\omega)/\theta(0)$ von der rechteckig modulierten Wechsellichtfrequenz $\nu = \omega/2\pi$ bei konstanter Über-
temperatur $T_a = 4^\circ\text{C}$ für die fünf ungeschwärzten Bolometer B 1 bis B 5 mit verschieden
starker Trägerfolie bei den angegebenen Drucken. Bolometerfläche $0,4 \times 0,4 = 0,16\text{ cm}^2$.

+ B 1 mit 40 μm Trägerfoliendicke
× B 2 mit 80 μm Trägerfoliendicke
○ B 3 mit 160 μm Trägerfoliendicke
△ B 4 mit 240 μm Trägerfoliendicke
▽ B 5 mit 320 μm Trägerfoliendicke

} gleiche Metallschichtdicke $R = 210-220\ \Omega$

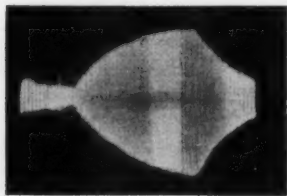


Abb. 25. Verlauf der Temperaturschwankungsamplitude $\theta(\omega)$ bei Bestrahlung mit rechteckig im Tastverhältnis 1:1 moduliertem Wechsellicht der Frequenz 12,5 Hz. Versuchsobjekt: B 1 bei $p = 10$ Torr und $T_a = 4^\circ\text{C}$

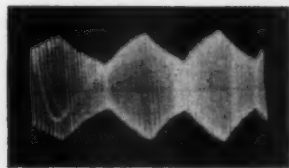


Abb. 26. Verlauf der Temperaturschwankungsamplitude bei Bestrahlung mit rechteckig im Tastverhältnis 1:1 moduliertem Wechsellicht der Frequenz 48 Hz. Versuchsobjekt: B 1 bei $p = 10$ Torr und $T_a = 4^\circ\text{C}$

2. Absolute Empfindlichkeit und Wechsellicht-Frequenzabhängigkeit geschwärzter Bolometer

Die absoluten Empfindlichkeiten der geschwärzten Bolometer B I bis B IVs für $\nu = 0$ bei 10^{-4} Torr sind aus Tabelle 1 und Abb. 12 zu entnehmen. Das Bolometer B III, als geschwärztes mit B IIIs bezeichnet, wurde auf seine Frequenzabhängigkeit und in Abhängigkeit vom Druck untersucht. In Abb. 31 sind die Ausschläge des Elektronenstrahles in Abhängigkeit von der Wechselfrequenz des Lichtes für vier verschiedene Drücke aufgezeichnet. Aus ihr ist zu entnehmen, daß

es auch hier bei vorgegebener Frequenz stets einen Druck gibt, bei dem der Ausschlag am größten wird.

Den Vergleich der Empfindlichkeit eines Bolometers vor (B III) und nach der Schwärzung (B IIIs) für verschiedene Frequenzen der Wechselbelichtung bringt Abb. 32 in allen Fällen auf den Ausschlag 100 für $\nu = 0$ bezogen.

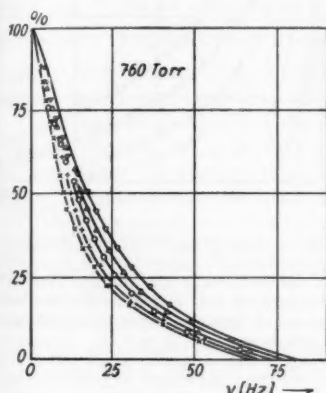


Abb. 27

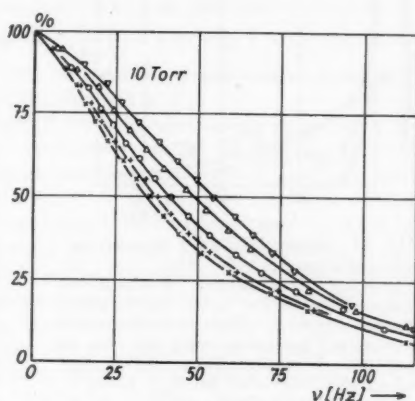


Abb. 28

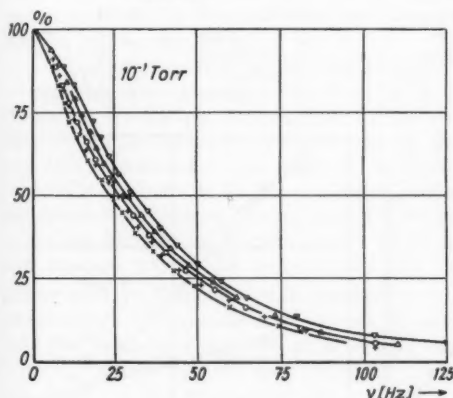


Abb. 29

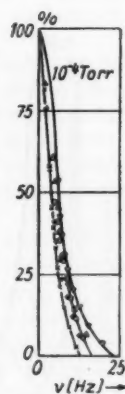


Abb. 30

Abb. 27 bis 30. Abhängigkeit der relativen Temperaturschwankungsamplitude $\theta(\omega)/\theta(0)$ von der rechteckig modulierten Wechsellichtfrequenz $\nu = \omega/2\pi$ bei konstanter Über-
temperatur $T_0 = 4^\circ \text{C}$ für die fünf ungeschwätzten Bolometer B 10 bis B 14 mit verschiedenen
starker Wismutschichtdicke bei den angegebenen Drucken. Bolometerfläche $0,4 \times 0,4 =$
 $0,16 \text{ cm}^2$.

- | | | | |
|---|-------------------------|--------------|----------------------------------------|
| × | B 10 Metallschichtdicke | 177 Ω | } gleiche Trägerfoliendicke 40 m μ |
| + | B 11 Metallschichtdicke | 222 Ω | |
| ○ | B 12 Metallschichtdicke | 271 Ω | |
| △ | B 13 Metallschichtdicke | 376 Ω | |
| ▽ | B 14 Metallschichtdicke | 439 Ω | |

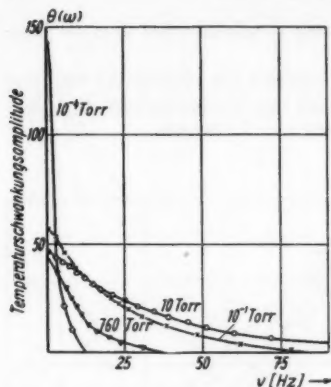


Abb. 31. Abhängigkeit der Temperaturschwankungsamplitude $\theta(\omega)$ von der rechteckig modulierten Wechsellichtfrequenz $\nu = \omega/2\pi$ in Hz bei verschiedenen Drucken. Die Ordinatenwerte wurden in Übereinstimmung mit Abb. 14 gewählt. Versuchsobjekte: B IIIs (geschwärztes Bolometer) bei $T_a = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$. Bolometerfläche $0,4 \times 0,4 = 0,16 \text{ cm}^2$.

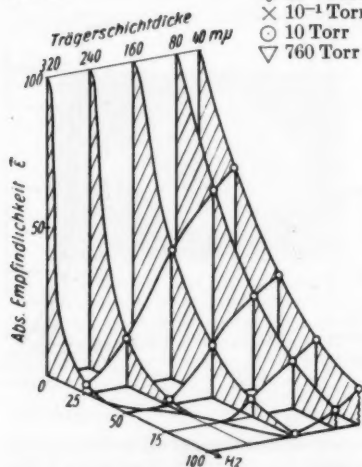


Abb. 33. Die absolute Empfindlichkeit $\bar{\varepsilon}$ in willkürlichen Einheiten (Meßausschlag) in Abhängigkeit von der Wechsellichtfrequenz (ν) und der Trägerschichtdicke (Bolometer B 1 bis B 5) für konstante Wismutschichtdicke und bei 10 Torr, $T_a = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$. In der durch die Linie für 25 Hz gelegten Ebene liegt die Kurve für 10 Torr in Abb. 34

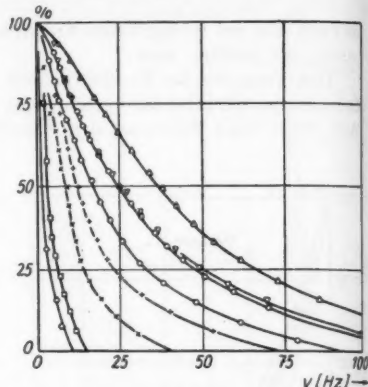


Abb. 32. Abhängigkeit der relativen Temperaturschwankungsamplitude $\theta(\omega)/\theta(0)$ von der rechteckig modulierten Wechsellichtfrequenz $\nu = \omega/2\pi$ in Hz bei verschiedenen Drucken, aber bei konstanter Übertemperatur $T_a = 4^\circ \text{C}$. Versuchsobjekt: B III (ungeschwärzt) und B IIIs (geschwärzt) mit durch Schwärzung vergrößerter Wärmekapazität. Bolometerfläche $0,4 \times 0,4 = 0,16 \text{ cm}^2$.

B IIIs	B III
◇ 10^{-4} Torr	□ 10^{-4} Torr
× 10^{-1} Torr	○ 10^{-1} Torr
○ 10 Torr	△ 10 Torr
▽ 10 Torr	+ 760 Torr

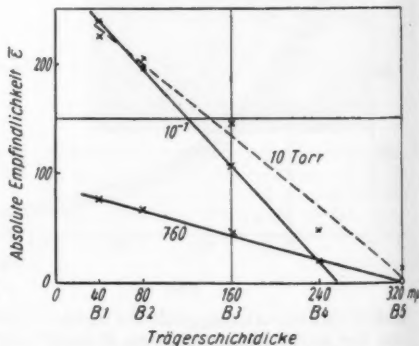


Abb. 34. Die absolute Empfindlichkeit $\bar{\varepsilon}$ in willkürlichen Einheiten (Meßausschlag) in Abhängigkeit von der Trägerfoliendicke (Bolometer B 1 bis B 5) und gleichstarker Wismutschichtdicke bei 25 Hz Wechsellichtfrequenz für drei verschiedene Drücke. $T_a = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$

3. Empfindlichkeit und Schichtdicke

a) Trägerschichten

Die Bolometer B 1 bis B 5 unterscheiden sich bei möglichst gleicher Dicke des Bolometerstreifens in der Stärke des Trägerhäutchens (Tabelle 1). Die Absolutempfindlichkeit wird bei der Frequenz $\nu = 0$ in erster Näherung wohl durch den Druck aber nicht durch die Dicke der Trägerschicht beeinflusst²⁴⁾. Aus den Abbildungen 18 bis 24 kann für eine Wechsellichtfrequenz zwischen 0 und 100 Hz die relative Empfindlichkeit (bezogen auf $\frac{\theta(\omega)}{\theta(0)} = 100$ für $\nu = 0$) des Bolometers verschiedener Trägerschichtdicke entnommen werden. Die Bolometerstreifen hatten eine konstante Übertemperatur von 4°C .

Um uns nun ein Bild von dem Einfluß der Trägerfoliendicke zu machen, betrachten wir Abb. 20 und denken uns die Kurven für B 1 bis B 5 (für 10 Torr) hintereinander im Abstand ihrer Trägerfoliendicken als dritte Koordinate angeordnet. Dies ergibt ein räumliches Bild wie in Abb. 33. Für $\nu = 0$ ist in allen Fällen die Amplitude gleich, der Abfall jedoch mit steigender Frequenz verschieden. Wird durch dieses Gebirge längs der 25-Hertz-Geraden eine senkrechte Ebene gelegt, so schneidet sie die Oberfläche des abfallenden Gebirges in einer Linie, die den Meßausschlag bei 25 Hertz Wechsellichtfrequenz und 10 Torr in Abhängigkeit von der Trägerschichtdicke des Bolometers wiedergibt. Derartige Kurvenzüge können aus dem graphisch-räumlichen Bild der Art der Abb. 33 für beliebig zwischen 0 bis 100 Hertz liegende Lichtfrequenzen entnommen werden und aus gleichartigen Darstellungen auch für andere Drucke als 10 Torr. Wenn diese Abhängigkeit des Meßausschlages als Funktion der Trägerfolienstärke mit dem Druck (bei unverändert starker Wismutschicht) als Parameter aufgetragen wird, ergeben sich Kurven wie in Abb. 34²⁵⁾.

Diese Kurven in Abb. 34 sind nur Beispiele der möglichen aus Abb. 18 bis 24 zu entnehmenden Aussagen. Was hier für 25 Hz aufgetragen ist, läßt sich auch für andere Wechsellichtfrequenzen ausführen und damit das Anschauungsmaterial über die Empfindlichkeit des Bolometers bei Bestrahlung mit rechteckigen Lichtimpulsen verschiedener Frequenzen in Abhängigkeit von der Stärke der Zelluloidträgerfolie erweitern, wobei diese Aussagen entsprechend den sieben Kurvenscharen für sieben verschiedene Drucke gemacht werden können.

Zu der Neigung der Kurven in Abb. 34 ist noch folgendes zu bemerken: Längs der Abszisse wächst die Schichtdicke und damit die Wärmekapazität, desto größer wird die Trägheit des Bolometers, sofern der Wärmeverluststrom \bar{W}_v als unveränderlich angesehen wird, wie das bei unveränderlichem Druck anzunehmen ist. Bei dünnerer Trägerfolie (z. B. $40\text{ m}\mu$) kann allerdings durch Vergrößerung von W_{kg} durch den um das Bolometer liegenden Gasmantel also bei großen Drucken (z. B. 760 Torr) ein \bar{W}_k -Wert entstehen wie bei dickerer Trägerfolie (z. B. $220\text{ m}\mu$) aber tiefen Drucken (z. B. 10 Torr). So kommt es, daß für $40\text{ m}\mu$ und 760 Torr die gleiche Amplitude zu beobachten ist wie etwa bei $190\text{ m}\mu$ und 10^{-1} Torr.

²⁴⁾ Deswegen wurden für vergleichende Zusammenstellungen immer die Werte für die Gleichlichtempfindlichkeit des am besten durchgemessenen Bolometers B IIIs verwendet.

²⁵⁾ Die Ordinatenwerte der Abb. 34 und 35 gewannen wir dabei auf folgende Art: Die aus Abb. 18 bis 24 bzw. 27 bis 30 entnommenen relativen Empfindlichkeiten wurden mit der Gleichlichtempfindlichkeit des Bolometers B IIIs multipliziert, nachdem diese so normiert worden war, daß sie für 10^{-4} Torr 100 betrug (vgl. auch²⁴⁾).

Die Amplitude sinkt mit zunehmender Wärmekapazität (Trägerschichtdicke), steigt aber wieder mit zunehmendem Wärmeverluststrom z. B. infolge größerer Wärmeleitung des Gases, also bei höheren Drucken. Die Wirkung der Schichtdickenzunahme auf die Verkleinerung der Amplitude kann geradezu durch die zunehmende Wärmeleitung des Gases überkompensiert werden. Das sieht man ausgehend vom Punkt für 80 $\mu\mu$ bei 10 und 10^{-1} Torr in Abb. 34. So ist z. B. bei 310 $\mu\mu$ Zelluloidstärke und 10 Torr die Amplitude etwa gleich der bei 240 $\mu\mu$ und 10^{-1} Torr. Die gleiche Betrachtung ist bei dem gemeinsamen Punkt für 240 $\mu\mu$, der den Kurven für 10^{-1} und 760 Torr angehört, möglich.

Bei ganz dünner Schicht (40 $\mu\mu$) überwiegt aber der Einfluß der geringeren Wärmekapazität (verglichen mit der von etwa 80 $\mu\mu$) auf die Amplitude gegenüber dem Druckeinfluß. Hier ist die Empfindlichkeit (Ausschlag) bei 10^{-1} Torr größer als bei 10 Torr.

Die hier gezogenen Folgerungen werden bei Betrachtung der aus Tabelle 2 hervorgegangenen Abb. 51 anschaulicher.

b) Metallschicht

In der gleichen Art wurden die Bolometer B 10 bis B 14 mit verschiedenen dicken Wismutschichten bei stets gleichstarker Trägerfolie von etwa 40 $\mu\mu$ hergestellt

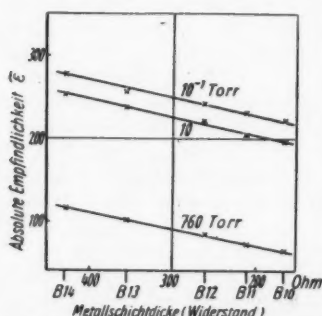


Abb. 35. Die absolute Empfindlichkeit $\tilde{\epsilon}$ in willkürlichen Einheiten (Meßauschlag) in Abhängigkeit von der Metallschichtdicke (in Ohm gemessen) der Bolometer B 10 bis B 14 bei gleichstarker Trägerfolienstärke (40 $\mu\mu$) und 25 Hz Wechsellichtfrequenz für drei verschiedene Drücke. $T_a = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$

und ausgemessen, wie es die Kurven der Abb. 27 bis 30 wiedergeben. Den Einfluß der Metallschichtdicke auf die Empfindlichkeit bei einer Wechselstromfrequenz von 25 Hz gibt Abb. 35²⁶⁾ an, wobei als Maß der Schichtdicke der Widerstand des Bolometerstreifens aufgetragen wurde.

c) Rußschicht

Die in Tabelle 1 enthaltenen Meßergebnisse und die Abb. 12 ergaben die Feststellung eines Empfindlichkeitsmaximums für blanke Bolometer mit dem Widerstand um 190 Ohm und die Unabhängigkeit der Empfindlichkeit vom Widerstand für geschwärzte Bolometer bei gleichzeitiger größerer Empfindlichkeit der berußten Empfänger. Der Einfluß der Berußung mit Wismutschwarz unmittelbar auf die blanke Wismutoberfläche des Bolometers ist aus Tabelle 1 an den Bolometern B I bis B VI,

die nach der Berußung mit B Is bis B VIs bezeichnet wurden, als schwache Widerstandsverminderung zu erkennen.

Als Ergebnis der Ausführungen in den Abschnitten III D 3a und 3b kann in Übereinstimmung mit den Meßergebnissen von M. Czerny und Mitarbeitern²⁷⁾

²⁶⁾ Die Ordinatenwerte der Abb. 34 und 35 gewannen wir dabei auf folgende Art: Die aus Abb. 18 bis 24 bzw. 27 bis 30 entnommenen relativen Empfindlichkeiten wurden mit der Gleichlichtempfindlichkeit des Bolometers B IIIs multipliziert, nachdem diese so normiert worden war, daß sie für 10^{-4} Torr 100 betrug (vgl. auch ²⁴⁾).

²⁷⁾ M. Czerny u. Mitarb., a. a. O.

der dominierende Einfluß der Trägerschicht und der geringe Einfluß der Dicke der Metallschicht festgestellt werden.

Die Abb. 32 zeigt den Unterschied der Oszillographenausschläge des unberußten und des berußten Bolometers B III und B IIIs bei verschiedenen Drucken und Wechsellichtfrequenzen. Ein Vergleich der Abb. 32 mit den Abb. 18 bis 24 zeigt, daß sich ein Einfluß der Berußung etwa ebenso bemerkbar macht wie die Dickenzunahme der Trägerschicht bei den Bolometern B 1 bis B 3. Diese Tatsache ist nur zu erklären aus der großen Anzahl der Gasmoleküle, die mit dem Wismutruß niedergeschlagen und in der Schicht gebunden sind, und so die Wärmekapazität mehr vergrößern als eine der Rußschicht entsprechende metallische Wismutschicht.

4. Druckabhängigkeit

Für den Fall $\nu = 0$ sind auf der Ordinaten des Koordinatensystems in Abb. 31 die aus Abb. 14 für $T_a = \text{konst.}$ vier Werte für 760, 10, 10^{-1} und 10^{-4} Torr

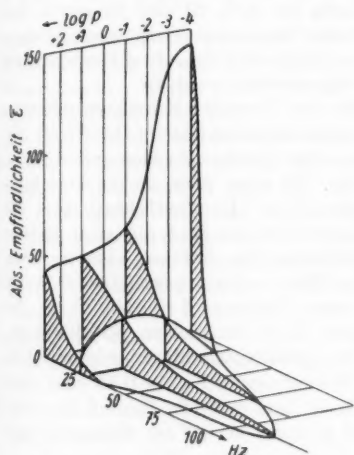


Abb. 36. Die absolute Empfindlichkeit \tilde{e} in willkürlichen Einheiten (Meßausschlag) in Abhängigkeit von der Wechsellichtfrequenz (ν) und dem Druck bei gleicher Metall- und Trägerfolien-Schichtdicke. Versuchsobjekt: B IIIs (geschwärztes Bolometer) der Fläche $0,4 \times 0,4 = 0,16 \text{ cm}^2$. $T_a = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$. In der durch die Linie für 25 Hz gelegten Ebene liegt die Kurve für B IIIs in Abb. 37

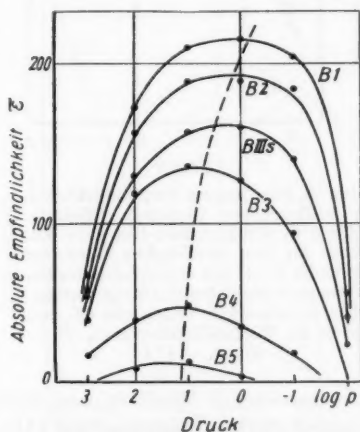


Abb. 37. Die absolute Empfindlichkeit \tilde{e} in willkürlichen Einheiten (Meßausschlag) in Abhängigkeit von dem Vakuum für fünf verschiedene Bolometer (B 1 bis B 5) mit verschieden starker Trägerfolie aber gleichstarker Wismutschicht bei 25 Hz Wechsellichtfrequenz. $T_a = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$

eingetragen. Mit steigender Wechselfrequenz fällt nun der Meßausschlag je nach Größe des Druckes verschieden schnell (nach (34)²⁰⁾).

Werden diese vier Kurven der Abb. 31 wiederum entsprechend den Abständen ihrer logarithmisch aufgetragenen Drucke hintereinandergestellt (Abb. 36), so

²⁰⁾ Siehe Fußnote 20).

ergibt ein Schnitt durch das Gebirge bei 25 Hertz einen Kurvenzug, der den Meßausschlag in Abhängigkeit von dem Druck darstellt, wobei der Parameter entweder die Trägerfoliendicke bei konstanter Wismutschichtdicke (Abb. 37) oder die Metall-

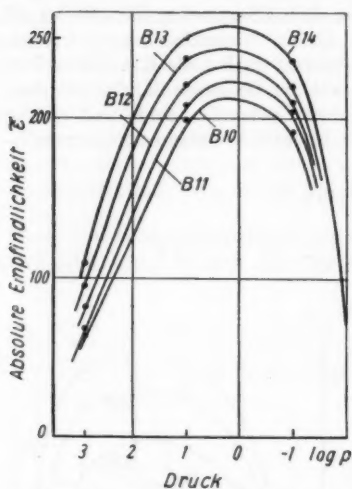


Abb. 38. Die absolute Empfindlichkeit $\tilde{\epsilon}$ in willkürlichen Einheiten (Meßausschlag) in Abhängigkeit von dem Vakuum für fünf verschiedene Bolometer (B 10 bis B 14) mit verschieden starken Wismutschichtdicken (in Ohm gemessen) aber gleichstarker Trägerfolie (40 m μ) bei 25 Hz Wechsellichtfrequenz. $T_a = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$

chieden starken Metallschichten bedeutend geringer als die der Bolometer mit ungleich starken Trägerschichten (Abb. 37).

5. Zeitkonstanten (Halbwertsfrequenzen)

Die Halbwertsfrequenz ist die Wechsellichtfrequenz, für die der Kathodenstrahloszillograph nur 50% des Ausschlages zeigt, die er für $\nu = 0$ aufweist. Die Werte für die Halbwertsfrequenzen der Bolometer B 1 bis B 5 und B 10 bis B 14 lassen sich aus den Abb. 18 bis 24 und 27 bis 30 als Abszissenwerte des Schnittpunktes der durch $\frac{\theta(\omega)}{\theta(0)} = 50\%$ gelegten Horizontalen mit den Kurvenästen ablesen. Eine Zusammenstellung bringt Tabelle 3.

Diese Halbwertsfrequenzen lassen sich über der Dicke der Trägerfolie (Bolometer B 1 bis B 5) oder über dem Widerstand der verschieden starken Wismutschichten (Bolometer B 10 bis B 14) auftragen, um so die Abhängigkeit der Halbwertsfrequenzen von den Schichtdicken zu erfassen. Erfahrungsgemäß ist aber die Halbwertsfrequenz $\nu_{1/2}$ weit weniger anschaulich als die Zeitkonstante τ ,

Tabelle 3
Halbwertsfrequenzen der verschiedenen Bolometer

Bolometer	B 1	B 2	B 3	B 4	B 5	B 10	B 11	B 12	B 13	B 14	B III	B IIIs
760 Torr	13,5	10	7,5	4,5	3	10	13,5	14	16	17,5	13,5	8
100 „	31	26,5	18,5	11	5,5	—	—	—	—	—	—	—
10 „	37,5	32,5	21,5	12	6,5	34,5	37,5	41	46,5	55	37,5	26
1 „	34	27,5	17	11	6	—	—	—	—	—	—	—
10 ⁻¹ „	26	20,5	12,5	7	3,5	23,5	26	27	29	31,5	26	17
10 ⁻² „	6,5	5,5	4	3	1,5	—	—	—	—	—	—	—
10 ⁻⁴ „	4	3	2	1	0,5	3,5	4	5	5,5	6	4	2,5

d. i. die Zeit, in der nach Bestrahlungsunterbrechung der Meßausschlag auf den e -ten Teil abgeklungen ist. Zwischen $\nu_{1/2}$ und τ besteht die Beziehung²⁹⁾:

$$(37) \quad \tau = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\nu_{1/2}},$$

mit deren Hilfe die aus den Abbildungen 18 bis 24 und 27 bis 30 gewonnenen $\nu_{1/2}$ -Werte in τ -Werte umgerechnet werden können.

Den Verlauf der Zeitkonstanten mit der Trägerschichtdicke und gleichstarker Wismutschicht zeigt Abb. 39, in Abhängigkeit von der Dicke der Wismutbelegung aufgetragen in Ohm bei unveränderter Trägerfolienstärke Abb. 40 und für einen größeren Unterschied an Metallschichtdicke auch Abb. 41.

Es gilt für die Zeitkonstante:

$$(21) \quad \tau = \frac{\overline{W}_k}{\overline{W}_v} = \frac{W_{kk} + W_{kv}}{W_{v1} + 4\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)(T_0 + T_a)^3}.$$

Danach müßte die Zeitkonstante der Trägerschichtdicke proportional sein. Da dies, wie Abb. 39 zeigt, nicht erfüllt ist, sondern τ besonders bei kleinen Drucken stärker als linear mit der Schichtdicke ansteigt, scheint

²⁹⁾ Die Beziehungen (34) und (37) gelten der Ableitung nach nur für Bestrahlung mit sinusförmigem Intensitätsverlauf, in aller Strenge sicher nicht für die hier verwendeten Rechteckimpulse. Daß sie in Näherung anwendbar ist, folgt aus Formel (31), denn das Glied für $n = 1$ bestreitet entsprechend dem Koeffizienten $\frac{\pi}{4}$ bereits 78,5% des Anteiles der Fourierglieder, aus der die Rechteckkurve zusammengesetzt ist. Eine experimentelle Nachprüfung der Berechtigung, die Beziehung (37) auch für Rechteckimpulse anzuwenden, bringt Abschnitt IV.

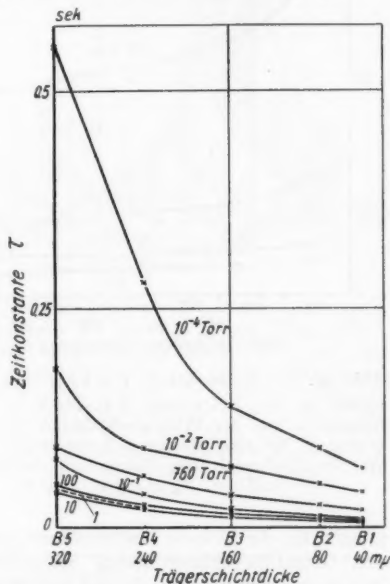


Abb. 39. Die Zeitkonstante $\tau = \sqrt{3} : (2\pi\nu_{1/2})$, gemessen an den Bolometern B 1 bis B 5, in Abhängigkeit von der Trägerfolienstärke bei gleichdicker Wismutschicht für fünf verschiedene Drücke. Bolometerfläche $0,4 \times 0,4 = 0,16 \text{ cm}^2$, $T_a = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$

nur folgende Deutung angängig zu sein: Die Wärmekapazität steigt linear mit der Schichtdicke an. Andererseits wird wegen der stärkeren Absorption der dickeren Trägerschichten die Emissionstemperatur der Rückseite des Bolometers verkleinert. Das bedeutet eine Abnahme des Wärmeverluststromes, denn dieser wird bei kleineren Drucken zum großen Teil von der Strahlung getragen.

Die Abbildungen 39 und 40 enthalten als Parameter die verschiedenen Drücke. Werden nun entsprechend der Darstellung in Abb. 36 die Drücke als dritte Koordinate aufgetragen, d. h. die Kurven von Abb. 39 und 40 hintereinander angeordnet, dann entsteht ein Gebirge mit einem tiefen Tal (Abb. 42). Die Oberfläche dieses

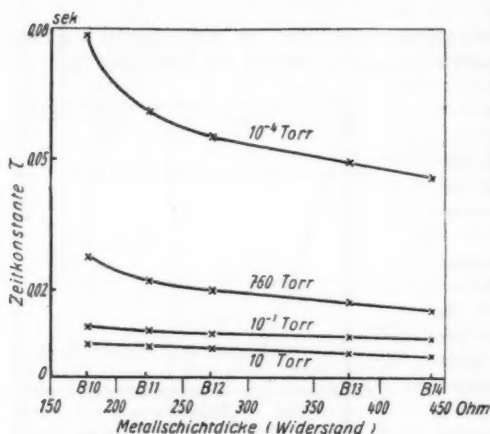


Abb. 40. Die Zeitkonstante $\tau = \sqrt{3} : (2 \pi \nu_{1/2})$, gemessen an den Bolometern B 10 bis B 14, in Abhängigkeit von der Wismutschichtdicke (in Ohm gemessen) bei gleichstarker Trägerfolie (40 m μ) für vier verschiedene Drücke. Bolometerfläche $0,4 \times 0,4 = 0,16 \text{ cm}^2$. $T_a = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$

Gebirges durchschneidet nun eine senkrechte Ebene, die an der Stelle der Werte für B 1 aufgestellt wird in der Form der Kurve B 1 in Abb. 43. Gleiche Vorgänge führen zu den Kurven für B 2 bis B 5 in Abb. 43 und B 10 bis B 14 in Abb. 44. Auf der Suche nach den Bedin-

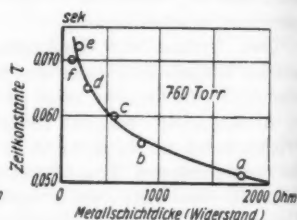


Abb. 41. Zeitkonstante τ , gemessen an den Bolometern Ba bis Bf, in Abhängigkeit von der Wismutschichtdicke (in Ohm gemessen) bei gleichstarker Trägerfolie. Bolometerfläche $0,17 \times 0,3 = 0,05 \text{ cm}^2$

gungen für die kleinste Zeitkonstante muß auf der dreidimensionalen Fläche mit den Grundflächenkoordinaten Schichtdicke der Trägerfolie (bei unveränderter Metallschichtdicke), Druck und der Höhenkoordinate τ der kleinste Wert für τ , d. h. die tiefste Stelle der Mulde gesucht werden. Er liegt in Abb. 43 oder 44 bei etwa 10 Torr und möglichst geringer Schichtdicke sowohl der Trägerfolie wie des Wismutbandes, wobei der Einfluß des letzteren geringer als der der Zelluloidfolie ist.

IV. Einstellzeit bei einmaliger kurzzeitiger Bestrahlung

Wird die bei $t = 0$ begonnene Bestrahlung des Bolometers bei $t = t'$ wieder unterbrochen, so fällt für die Zeitdauer t' ein einmaliger rechteckiger Strahlungsimpuls auf den Empfänger. Ein derartiger Rechteckimpuls wurde durch ein kurzzeitiges Öffnen eines Zentralverschlusses bei steiler Abblendung erzeugt. Für diese Versuche stand das Bolometer B IIIs zur Verfügung, das auf $T_a = 4^\circ \text{C}$ bei 10 Torr aufgeheizt war. Die am Bolometer liegende Wechselfrequenz betrug

1000 Hz. Die Abbildungen 45 bis 49 zeigen die bei den einzelnen Verschußzeiten $t = 1/200, 1/111, 1/62, 1/34,5$ und $1/0$ sec auf der Braunschen Röhre entstandenen Bilder. Es zeichnen sich die aus (17) und (19) resultierenden Exponentialkurven ab. In Tabelle 4 sind in der ersten Spalte die Verschußzeiten, in der zweiten die aus den Abbildungen 45 bis 49 entnommenen in Prozenten der Amplitude für $t' = \infty$ angegebenen Amplituden für Belichtungen der Zeit $t = t'$ aufgezeichnet; in der dritten wurde das Produkt $t' \nu'$ aus (17) und (34) für die in Spalte 2 der Tabelle 4 aufgeführten Amplituden nach folgendem Verfahren berechnet:

Es ist nach (17)

$$\frac{(AT)_{t'}}{(AT)_{\infty}} = \left(1 - e^{-\frac{\bar{W}_v}{\bar{W}_k} t'}\right) \quad (38)$$

oder

$$\frac{\bar{W}_v}{\bar{W}_k} = -\frac{\ln\left(1 - \frac{(AT)_{t'}}{(AT)_{\infty}}\right)}{t'} \quad (39)$$

und hiermit ist nach dem einmaligen Belichtungsvorgang für die in Spalte 1 der Tabelle 4 stehende Zeit $t = t'$ das Verhältnis $\frac{\bar{W}_v}{\bar{W}_k}$ durch den Quotienten $\frac{(AT)_{t'}}{(AT)_{\infty}}$ bestimmt, der gleich der Zahlen in Spalte 2 Tabelle 4 dividiert durch 100 ist.

Parallel zu diesem Versuch mit kurzzeitiger Gleichlichtbestrahlung gibt es nun bei sinusförmigen Wechsellichtimpulsen eine

Frequenz $\omega' = 2\pi \nu'$, für die sich eine Amplitude beobachten läßt, die sich zur Amplitude für $\omega = 0$, d. i. $t = \infty$ genau so wie $\frac{(AT)_{t'}}{(AT)_{\infty}}$ verhält. Es gilt

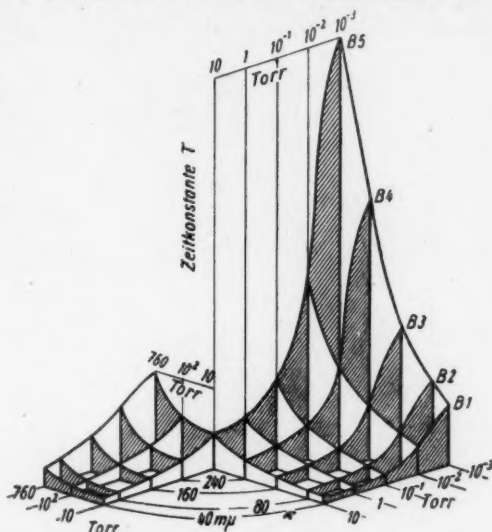


Abb. 42. Die Zeitkonstante $\tau = \sqrt{3} : (2\pi \nu_{1/2})$, gemessen an den Bolometern B 1 bis B 5, in Abhängigkeit von der Trägerschichtdicke bei gleichstarker Wismutschicht und dem Druck. $T_a = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$. Bolometerfläche $0,4 \times 0,4 = 0,16 \text{ cm}^2$. Die an der Stelle der Trägerschichtdicke für B 4 hindurchgelegte Ebene enthält als Schnittpur die Kurve für B 4 in Abb. 43. Zur Übersichtlichkeit wurde das Modell längs der τ -Achse an der Stelle 10 Torr nach links und rechts aufgeklappt gezeichnet

Tabelle 4

Verschußzeit t' sec	Amplitude z. Zeit $t = t'$ sec in % der Amplitude für $t = \infty$	Produkt $t' \nu'$ berechnet	Produkt $t' \nu'$ gemessen
1/200	33,8	0,20	0,20
1/111	60,7	0,19	0,17
1/62	77,5	0,16	0,17
1/34,5	91,5	0,18	0,17
∞	100	—	—

also hierfür:

$$\frac{(\Delta T)_{t'}}{(\Delta T)_{\infty}} = \frac{\theta(\omega')}{\theta(0)}. \quad (40)$$

Dieses Verhältnis errechnet sich für sinusförmiges Wechsellicht aus (34) zu

$$\frac{\theta(0)}{\theta(\omega')} = \sqrt{1 + \frac{\omega'^2 \bar{W}_k^2}{\bar{W}_v^2}} \quad (41)$$

oder $t' \nu'$ nach (41) zu

$$t' \nu' = \frac{\bar{W}_v}{2 \pi \bar{W}_k} t' \cdot \sqrt{\frac{\theta^2(0)}{\theta^2(\omega')} - 1} \\ = - \frac{\ln \left[1 - \frac{(\Delta T)_{t'}}{(\Delta T)_{\infty}} \right]}{2 \pi} \sqrt{\frac{\theta^2(0)}{\theta^2(\omega')} - 1}. \quad (42)$$

Dieser nach (42) aus den Daten der Spalte 2 in Tabelle 4 errechnete Wert für $t' \nu'$ steht in Spalte 3 für verschiedene Größen von t' und läßt sich mit dem gemessenen $t' \nu'$ vergleichen, worin t' durch die Werte in Spalte 1, ν' aus der Kurve in Abb. 32 für B IIIs bei 10 Torr entnommen werden kann, wobei ν' als die Frequenz festzustellen ist, für die eine Amplitude der Größe der in Spalte 2 (Tabelle 4) stehenden Werte auftritt.

Interpoliert man in Spalte 2 der Tabelle 4 auf den Amplitudenwert $(1 - 1/e) \cdot 100$, so ergibt sich $t' = \tau = 1/106 \text{ sec} = 9,4 \text{ msec}$. Nach Tabelle 3 beträgt die zu B IIIs bei 10 Torr gehörige Halbwertsfrequenz $\nu_{1/2} = 26 \text{ Hz}$, so daß sich hier für $\tau \nu_{1/2}$, der experimentell ermittelte Wert 0,244 etwas abweichend von dem theoretisch (nach (37)) ermittelten 0,277 ergibt.

Die Übereinstimmung der Werte $t' \nu'$ in den beiden letzten Spalten in der Tabelle 4 und der Werte $\tau \nu_{1/2}$ ist relativ gut, wenn man bedenkt, wieviel Vereinfachungen durch die Postulierung der Konstanz der

Werte für \bar{W}_v und \bar{W}_k im Ansatz (9) und durch das Rechnen mit den Formeln (17) und (34), die nicht rechteckig, sondern sinusförmig modulierte Intensitätsverteilung voraussetzen, ge-

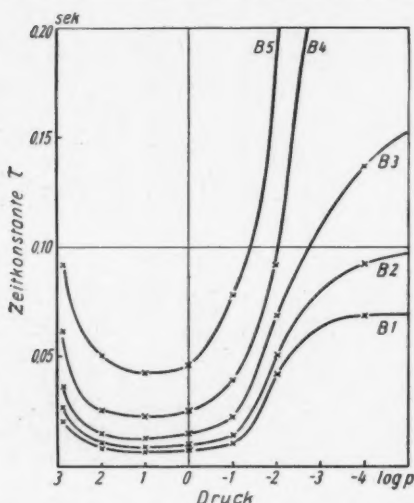


Abb. 43. Die Zeitkonstante $\tau = \sqrt{3} : (2 \pi \nu_{1/2})$, gemessen an den Bolometern B 1 bis B 5 in Abhängigkeit vom Druck bei gleichdicker Wismutschicht für fünf verschiedene Drücke. Bolometerfläche $0,4 \times 0,4 = 0,16 \text{ cm}^2$, $T_0 = \text{konst.} = 4^\circ \text{C}$

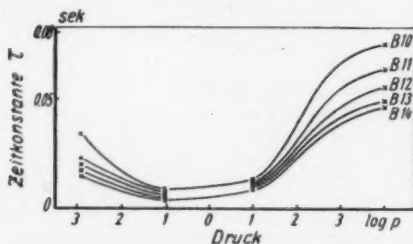


Abb. 44. Die Zeitkonstante $\tau = \sqrt{3} : (2 \pi \nu_{1/2})$, gemessen an den Bolometern B 10 bis B 14 in Abhängigkeit von der Wismutschichtdicke (in Ohm gemessen) bei gleichstarker Trägerfolie ($40 \text{ m}\mu$) in Abhängigkeit vom Druck. Bolometerfläche $0,4 \times 0,4 = 0,16 \text{ cm}^2$

(9) und durch das Rechnen mit den Formeln (17) und (34), die nicht rechteckig, sondern sinusförmig modulierte Intensitätsverteilung voraussetzen, ge-

macht werden. Wir erhalten somit nachträglich eine Rechtfertigung, die Formeln (17) und (34) und speziell die Beziehung (37) $\tau \nu_{1/2} = \sqrt{3/2\pi}$ auch für Rechteckimpulse anzuwenden.

Wie man nach (25) zu erwarten hatte, ist die vom Kathodenstrahl überstrichene Fläche der Impulsdauer t' direkt proportional.

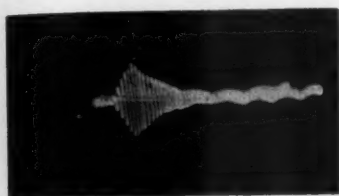


Abb. 45

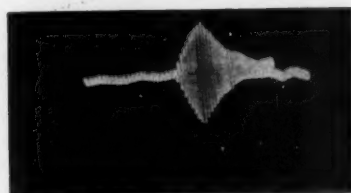


Abb. 46



Abb. 47



Abb. 48

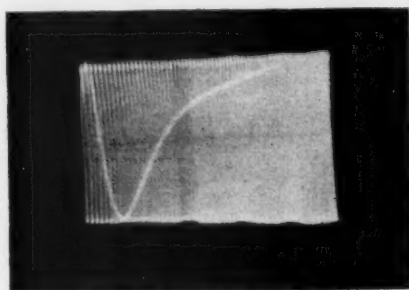


Abb. 49

Abb. 45 bis 49. Photographien von Elektronenstrahlbildern auf dem Leuchtschirm einer Oszillographenröhre. Verlauf der Temperaturerhöhung bei Bestrahlung mit einem Rechteckimpuls der Dauer $t' = 1/200, 1/111, 1/62, 1/34,5, 1/0$ sec. Versuchsobjekt: B IIIs (geschwärztes Bolometer) bei 10 Torr

V. Bedeutung, Bestimmungsmethoden und Größe von \bar{W}_e und \bar{W}_k

Nach der Differentialgleichung (9) ist der Ablauf der Erscheinungen am bestrahlten Bolometer durch die Werte des spezifischen Wärmeverluststromes \bar{W}_e und der Wärmekapazität \bar{W}_k bestimmt. Durch einige der vorstehenden Bezie-

hungen ist es möglich, \bar{W}_v und \bar{W}_k aus den angegebenen Meßdaten zu errechnen. Die Gl. (37) verknüpft die Zeitkonstante τ oder die Halbwertsfrequenz $\nu_{1/2}$ mit dem Verhältnis \bar{W}_v/\bar{W}_k in der Art

$$(37) \quad \nu_{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\bar{W}_v}{\bar{W}_k} = 0,277 \frac{\bar{W}_v}{\bar{W}_k}.$$

Weiterhin ist nach (11):

$$(11) \quad \bar{W}_v = \frac{L}{T_a},$$

woraus sich \bar{W}_k zusammen mit (37) ergibt zu

$$\bar{W}_k = \frac{\sqrt{3}}{2\pi \nu_{1/2}} \cdot \bar{W}_v = \frac{0,277}{\nu_{1/2}} \frac{L}{T_a}.$$

Auch (23) und (24) lassen aus Gleichstrommessungen³⁰⁾ die Bestimmung von \bar{W}_k und \bar{W}_v zu. Es folgt aus (24)

$$(24) \quad \bar{W}_k = \frac{Q}{\text{ctg } \alpha},$$

worin α der nach Abb. 11 angegebene Winkel für den Wert $t = 0$ ist. An einer beliebigen Stelle für t wird hingegen durch α nach (23) \bar{W}_v bestimmt zu

$$\bar{W}_v = \frac{Q - \bar{W}_k \cdot \text{ctg } \alpha}{\Delta T}. \quad (43)$$

Aus den vorstehenden Messungen ergeben die Formeln (11) und (37) die Größen für \bar{W}_v und \bar{W}_k . Die für das geschwärzte Bolometer B IIIs bei einer Übertemperatur $T_a = 4^\circ \text{C}$ errechneten Werte sind in Tabelle 2 in Abhängigkeit vom Druck zusammengestellt.

Besondere Aufmerksamkeit verdienen die Größen \bar{W}_v und \bar{W}_k in Abhängigkeit vom Druck. Graphisch über dem Druck aufgetragen ergeben die Werte in den entsprechenden Spalten der Tabelle 2 die Kurven \bar{W}_v (Wi) und \bar{W}_k (Wi) in Abb. 50.

Zum Vergleich sind die zugehörigen Größen aus Tabelle 2 der Arbeit von Czerny und Mitarbeitern eingetragen, die hier mit \bar{W}_v (Cz) und \bar{W}_k (Cz) bezeichnet sind.

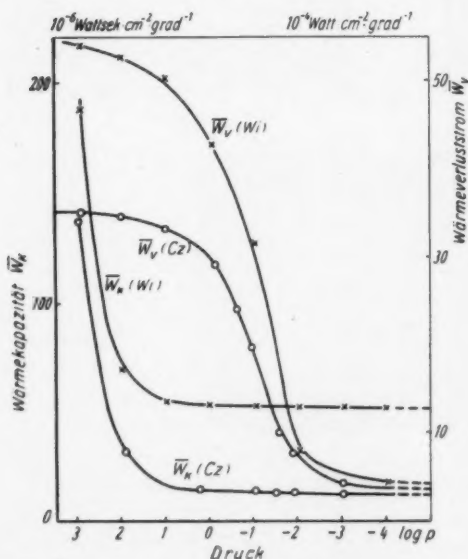


Abb. 50. \bar{W}_v - und \bar{W}_k -Werte in Abhängigkeit vom Druck. \bar{W}_v (Wi), \bar{W}_k (Wi) eigene Werte, \bar{W}_v (Cz), \bar{W}_k (Cz) von Czerny und Mitarbeitern angegebene Werte

³⁰⁾ Zu diesen Bestimmungen ist der Oszillograph zu eichen, so daß aus den An- und Abklingkurven (vgl. Abb. 11) der Winkel α entnommen werden kann.

Allerdings liegen unsere Werte für \bar{W}_v und \bar{W}_k höher. Das hier verwendete Bolometer hatte eine kleinere Empfängerfläche als das von Czerny benutzte und war geschwärzt. Sieht man von der Wärmestrahlung ab, so steigt der Wärmeverluststrom schwächer als linear mit der Flächengröße an²¹⁾. Der spez. Wärmeverluststrom \bar{W}_v wird sich somit bei größer werdender Fläche verringern. Die Konstanz von \bar{W}_v in Abhängigkeit von der Stärke der Aufheizung des Bolometers, also von der Übertemperatur, wurde bereits für mittlere Drücke von Czerny nachgewiesen und gilt wohl auch für höhere Drücke; die stärkere Aufheizung des Bolometers bei Czerny bei niedrigen Drücken fällt wegen des geringfügigen Anteils an Wärmestrahlung nicht sehr ins Gewicht. Nach Tabelle 1 ergibt sich für B IIIs ein errechneter Wert für die Wärmekapazität von $24 \cdot 10^{-6}$ Wattsec/cm² grad, nach Tabelle 2 ein gemessener von $52 \cdot 10^{-6}$ Wattsec/cm² grad. Daß der gemessene Wert größer ist als der errechnete, liegt daran, daß auch die an die Empfängerfläche angrenzenden Teile mit erwärmt werden und so einen Beitrag zur Wärmekapazität liefern. Der Unterschied zwischen den gemessenen Werten für die Wärmekapazität in der Arbeit von Czerny und hier liegt einmal darin, daß hier die auf die Flächeneinheit entfallende Wärmekapazität von B IIIs wegen des geringeren Widerstandes der Wismutschicht und vor allem wegen der zusätzlich aufgebrauchten Schwärzung größer ist, außerdem macht sich die Wärmekapazität der Elektroden usw. stärker bemerkbar, da bei uns, wie oben schon berichtet, die Empfängerfläche kleiner war als bei Czerny und Mitarbeitern. Ferner liegt der gemessene in Tabelle 4 bei Czerny aufgeführte Wert etwas niedriger als der nach seinen Angaben errechnete.

Nach dem oben über den Einfluß der Flächengröße auf den spezifischen Wärmeverluststrom Gesagten wird verständlich, daß sich der spezifische Wärmeverluststrom bei Czerny und bei uns um einen Faktor unterscheidet. Man erhält nämlich:

$$\bar{W}_v(W_i) = \bar{W}_v(Cz) \cdot 1,5.$$

Ein entsprechender Vergleich der Wärmekapazitäten führt zu der Feststellung, daß

$$\bar{W}_k(W_i) = \bar{W}_k(Cz) + 40$$

ist. Der Unterschied der Wärmekapazitäten um eine additive Größe (40 Einheiten) ist bedingt durch die unterschiedliche Konstruktion. Die nach dieser Rechenregel aus $\bar{W}_k(Cz)$ und $\bar{W}_v(Cz)$ gewonnenen Werte liegen leicht streuend auf den $\bar{W}_k(W_i)$ - und $\bar{W}_v(W_i)$ -Kurven.

Die Druckabhängigkeit von \bar{W}_v und \bar{W}_k läßt unter Benutzung der Abb. 51 alle wesentlichen Schlüsse zu.

Es ist der gemessene Wärmeverluststrom \bar{W}_v in logarithmischem Maßstab über dem Logarithmus des Druckes aufgetragen worden. \bar{W}_v setzt sich bei 10^{-3} bis 10^{-4} Torr aus den Wärmeverlusten durch Strahlung ($\bar{W}_{v,s}$) und dem Teil der Wärmeleitung zusammen, der durch die Leitung der Schicht bedingt ist ($\bar{W}_{v,k}$), während der bei größeren Drücken hinzutretende Anteil durch die Wärmeleitung des Gases bestimmt ist.

Subtrahiert man die Ordinatenwerte dieser Kurve von einer vorläufig noch unbestimmten Konstanten, die die Größe $\log Q$ darstellen soll, so erhält man wegen

²¹⁾ E. Warburg u. a., a. a. O.

der logarithmischen Auftragung nach (17) $Q/\bar{W}_v = \Delta T_\infty$, d. h. die Temperaturerhöhung. Andererseits läßt sich ΔT_∞ aus den experimentell gewonnenen Meßausschlägen (ε in Tabelle 2) berechnen. Dazu wird aus (13) und (17) die Proportionalität zwischen ε und $\sqrt{\Delta T}$ benutzt. In den beiden Bestimmungsverfahren für ΔT_∞ ist im ersten Fall noch $\log Q$, im zweiten Falle noch eine Proportionalitätskonstante unbestimmt. Beide können, da die Ordinatenwerte logarithmisch

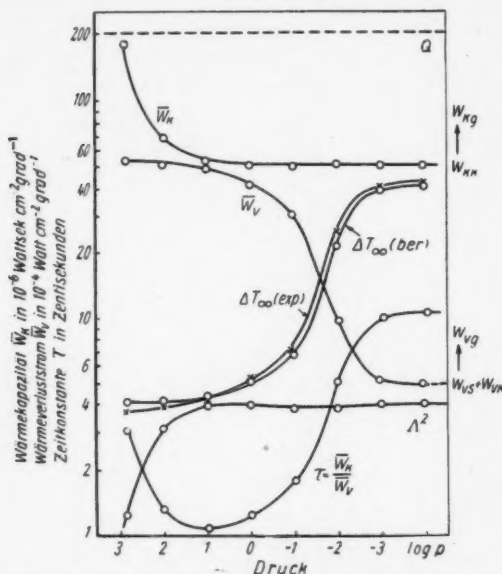


Abb. 51. Zur Leistungsfähigkeit des Bolometers B IIIIs bei $T_a = 4^\circ \text{C}$. Es sind aufgetragen die experimentell bestimmten Größen \bar{W}_v [10^{-4} Watt $\text{cm}^{-2} \text{grad}^{-1}$] τ [Centisek.], Q/\bar{W}_v (aus Gleichlichtmessungen Kurve $\times - \times$) und die berechneten Werte Q/\bar{W}_v (Kurve $\circ \circ \circ$), \bar{W}_k [10^{-4} Watt $\text{sec cm}^{-2} \text{grad}^{-1}$] (errechnet aus \bar{W}_v/τ , Λ^2 (Quadrat der Leistungsfähigkeit), Q willkürliche konstante Einstrahlung

tragen worden. Auffällig ist das breite Minimum

$$(21) \quad \tau = \frac{\bar{W}_k}{\bar{W}_v}$$

kann durch Addition der Ordinaten der \bar{W}_v - und τ -Kurve die Wärmekapazität als Funktion des Druckes bestimmt werden. Die erhaltene Kurve \bar{W}_k gliedert sich in zwei Abschnitte, einen konstanten Teil unterhalb 10 Torr und einen für größere Drucke ansteigenden. Der konstante Anteil ist durch die Konstruktion des Bolometers bedingt, während der Zuwachs dem Gasanteil an der Wärmekapazität zuzuschreiben ist.

aufgetragen sind, nur eine Verschiebung der Kurven längs der Ordinate bewirken. Da hier nur die Abhängigkeit vom Druck betrachtet werden soll, braucht auf die absolute Größe, die mit der Einstrahlung verändert werden kann, kein Wert gelegt zu werden. Um die Kurven besser vergleichen zu können, wählt man entweder $\log Q$ oder den Proportionalitätsfaktor so, daß die Kurven für einen Druck (z. B. 10 Torr) gleiche Ordinatenwerte haben. Aus der verhältnismäßig guten Übereinstimmung der beiden Kurven kann die Berechtigung zu den vorgenommenen Ansätzen und Vereinfachungen hergeleitet werden.

Weiterhin ist in Abb. 51 die aus

$$(37) \quad \tau = \frac{\sqrt{3}}{2 \pi v_{1/2}}$$

berechnete Zeitkonstante τ in Zentisekunden eingezeichnet bei etwa 10 Torr. Wegen

Die Abb. 51 gestattet noch eine Abschätzung über die Leistungsfähigkeit eines Bolometers in den verschiedenen Druckgebieten bei konstantem T_u . Es gilt für die Leistungsfähigkeit²²⁾ Δ (vgl. VI):

$$\Delta = \frac{1}{J} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\min}} \frac{1}{\sqrt{t_m}}, \quad (44)$$

dabei ist ε der Meßausschlag, ε_{\min} der Störausschlag, t_m die Meßdauer und J der auffallende Energiestrom. Nach (12b) ist der Meßausschlag für ΔT_{∞}

$$\varepsilon \sim i_G = c \cdot \beta \sqrt{\bar{W}_v \cdot F \cdot T_u} \cdot \Delta T_{\infty} \quad (45)$$

mit

$$\Delta T_{\infty} \sim \frac{J}{\bar{W}_v}, \quad (17)$$

$$\varepsilon \sim i_G = c \cdot \beta \cdot \sqrt{\frac{F \cdot T_u \cdot R \cdot J^2}{\bar{W}_v}}, \quad (46)$$

für $t_m = \tau$ ist ΔT prop. ΔT_{∞} , so daß sich nur die Konstante c ändert. Mit $\tau = \frac{\bar{W}_k}{\bar{W}_v}$ erhält man:

$$\Delta^2 = \text{const.} \frac{1}{\varepsilon_{\min}^2} \beta^2 \frac{F \cdot T_u \cdot R}{\bar{W}_k}. \quad (47)$$

In unserem Falle, wo es sich um dieselbe Bolometerart bei konstantem T_u handelt, erhält man:

$$\Delta^2 = \text{const.} \frac{1}{\bar{W}_k}. \quad (48)$$

Die Formel (44) gestattet außerdem noch Bolometer verschiedener Metallfolien miteinander zu vergleichen. Wenn es sich dabei um die gleiche Bauart handelt, kann ε_{\min} als konstant angesehen werden.

Die Größe Δ^2 läßt sich in Abb. 51 leicht durch Spiegelung der \bar{W}_k -Kurve an einer beliebigen Horizontalen veranschaulichen. Man findet für Drucke kleiner als 10 Torr, daß die Leistungsfähigkeit eines Bolometers in diesem Druckgebiet konstant bleibt.

VI. Vergleich von Strahlungsempfängern

Mit den Strahlungsmeßgeräten wie Bolometer, Thermoelemente, Radiometer und Mikroradiometer sollen hauptsächlich zwei Aufgaben gelöst werden:

A) Die Messung der Bestrahlungsdichte, d. h. der Strahlung, die pro sec und cm^2 auf ein Flächenelement bestimmter Richtung fällt.

B) Der energetische Vergleich der Strahlung verschiedener Wellenlänge, wie sie z. B. einen Monochromator verläßt.

Im Fall A) befindet sich der Empfänger in einem gleichmäßigen Strahlungsfeld; er wird hier desto mehr Energie in erg/sec cm^2 herausgreifen, je größer seine Oberfläche ist. Im Fall B) steht dagegen ein bestimmtes Energiequantum in erg/sec zur Verfügung, eine Vergrößerung der Oberfläche bedeutet keine zusätzliche Energieaufnahme, wenn man die im Ultraroten nur bedingt gegebene Möglichkeit voraussetzt, Strahlung beliebig zu konzentrieren.

²²⁾ W. Dahlke u. G. Hettner, Z. Physik 117, 74 (1941).

Es sollen nur einige Strahlungsempfänger miteinander verglichen werden. Sie können sich unterscheiden in den nachfolgenden drei Größen

1. Empfindlichkeit, d. i. der Quotient aus Meßausschlag ε und auffallendem Energiestrom J in erg/sec cm².

2. Mittlere Schwankung ihres Ausschlages. Bei kleiner werdendem Energiestrom J erreicht der Meßausschlag ε einen Wert von der Größe des durch spontane Temperatur- und Energieschwankungen hervorgerufenen Schwankungsausschlages ε_{\min} .

3. Meßdauer t_m . Da der mittlere Fehler des Mittelwertes aus n Einzelmessungen \sqrt{n} mal kleiner ist als der einer Einzelmessung und da die in einer gegebenen Zeit mögliche Zahl von Messungen proportional zu $1/t_m$ ist, geht bei einem Vergleich zwischen Instrumenten mit verschiedener Meßdauer diese als Wurzel ein.

Somit erhält man als Maß für die Leistungsfähigkeit eines Gerätes den Ausdruck

$$(44) \quad A = \frac{1}{J} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\min}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_m}}.$$

Ferner spielen praktische Erwägungen eine Rolle, da man gern größeren Aufwand vermeidet.

Czerny³³⁾ wies nach, daß die Leistung des Thermoelementes, des Mikroradiometers und des Radiometers eine für alle „Wärmekraftmaschinen“ gleiche untere Grenze hat; Dahlke und Hettner³⁴⁾ bestätigten diesen Nachweis und dehnten ihn auf das Bolometer, ein sog. „Steuergerät“ aus. Theissing³⁵⁾ untersuchte Empfindlichkeit und Leistungsfähigkeit verschiedener Strahlungsinstrumente experimentell.

Der im folgenden nach der Aufstellung in Tabelle 5 gezogene Vergleich soll sich nur auf Bolometer erstrecken, die gewisse Ähnlichkeiten in der Bauart haben.

Die Abschätzung der Vor- und Nachteile gegenüber anderen Konstruktionen bleibt einem Vergleich mit den Angaben Theissings³⁵⁾ und Rosenthals³⁶⁾ überlassen.

Abb. 52 zeigt die Form und die Maße des Doppelbolometers von C. Zeiß.

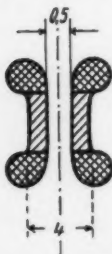


Abb. 52. Konstruktion und Abmessungen des Zeißschen Doppelbolometers

Zu den in Tabelle 5 zusammengestellten Ergebnissen läßt sich sagen, daß erst ein unmittelbarer Vergleich der einzelnen Konstruktionen unter genau gleichen Bedingungen Auskunft über die Berechtigung der Bevorzugungen des einen vor dem anderen geben würde. In allen Fällen ist wegen der Ähnlichkeit der Konstruktionen keine grundsätzlich andere Größenordnung der Empfindlichkeit zu erwarten, abgesehen von dem Formfaktor, der noch einmal genauer untersucht werden sollte.

³³⁾ M. Czerny, Ann. Physik 12, 993 (1932).

³⁴⁾ W. Dahlke u. G. Hettner, Z. Physik 117, 74 (1941).

³⁵⁾ H. Theissing, Physik Z. 88, 557 (1937).

³⁶⁾ G. Rosenthal, Z. Instrumentenkde. 59, 432 (1939); 59, 457 (1939); Z. wiss. Photogr. 39, 174 (1940).

Tabelle 5
Vergleich einiger Bolometerempfindlichkeiten

Her- steller ³⁷⁾	Mate- rial	Fläche cm ²	Metall- schicht- dicke μ	Träger- folien- dicke μ	Quadrat- wider- stand Ohm	Druck Torr	1/e msek	Strah- lungs- dichte Watt · 10 ⁷ /cm ²	Kleinste nachweis- bare Leistung Watt · 10 ⁷
Zeiß	Sb	0,09	0,07	0,2	17,5	1	7	3	0,27
Cz.	Bi	0,42		0,04	200	0,5	70	1,1	0,46
Wi.	Bi	0,16	0,004	0,04	190	760 10 10 ⁻⁴	35 10 110	18,4 18,5 5,6	~0,3 ~0,3 ~0,1
Mö.	Bi	0,05		0,15	140	760	100	4,5	0,22

Schlußbemerkung

Die vorstehend beschriebenen Experimente wurden im Jahre 1943 begonnen und nach einer längeren Pause 1949 wieder aufgenommen. Sie ergänzen die Ergebnisse der im Physikalischen Institut der Universität Frankfurt a. M. fast gleichzeitig angestellten Versuche sowohl in experimenteller als auch in theoretischer Hinsicht. Trotz der Verschiedenartigkeit der Meßverfahren und der Benutzung von rechteckförmigen Strahlungsimpulsen statt der sinusförmigen lassen sich die Ergebnisse miteinander vergleichen und die Differenzen theoretisch deuten. Durch die in der vorliegenden Arbeit eingeführte Aufspaltung der summarischen Größen \overline{W}_v und \overline{W}_k gelingt es, alle Meßergebnisse befriedigend zu erklären, so daß die in der Differentialgleichung (9) gemachten Ansätze — solange es sich nicht um sehr große Strahlungsintensitäten handelt — als ausreichend angesehen werden können.

³⁷⁾ Cz: M. Czerny und Mitarbeiter a. a. O., Wi: G. Wichert, Mö: G. C. Mönch nach vorliegender Arbeit.

Halle (Saale), II. Physikalisches Institut der Martin-Luther-Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 14. 11. 1952.)

Nachweis der Elektrolumineszenz mit Hilfe von Mehrschichten-Farbfilm

Von Georg Wendel

(Mit 3 Abbildungen und 1 mehrfarbigen Tafel)

Inhaltsübersicht

Mit Hilfe von Mehrschichten-Farbfilm, dessen Eigenschaften kurz beschrieben werden, gelingt es, die Anregung von Strahlungsvorgängen an Elektrolumineszenzschichten zu untersuchen und den Nachweis zu führen, daß die elektrische Anregung bestimmter Leuchtstoffe unmittelbar, ohne den Umweg über die Anregung durch die Gasentladung, möglich ist.

Einleitung

Destriau erkannte als erster die Möglichkeit, mit Hilfe elektrischer Wechselfelder die Lumineszenz gewisser Leuchtstoffe zu erregen¹⁾, diese Art der Anregung wurde von ihm näher untersucht und mit Elektrolumineszenz bezeichnet²⁾. Bei den meisten Versuchen bettete er den Leuchtstoff in Öl zwischen eine Metallplatte und eine Glimmerplatte ein, über der eine leitende durchsichtige Schicht angeordnet war. Die verwendeten Feldstärken lagen bei 100 kV_{eff}/cm und konnten bis 700 kV_{eff}/cm gesteigert werden, bevor ein Durchschlag eintrat. Nicht alle Leuchtstoffe eigneten sich gleich gut für diese Art der Anregung. Erst bei Feldstärken über 200 kV/cm konnten alle Phosphore zum Leuchten gebracht werden. Der niedrigste Feldstärkenschwellenwert wurde bei dem Phosphor ZnS—Cu, Gunts Nr. 13, bei einer Feldstärke von 12000 V_{eff}/cm festgestellt. Destriau und Saddy³⁾ untersuchten die Abhängigkeit der Schwellenfeldstärke von den Präparationsbedingungen und es gelang ihnen, einen Phosphor herzustellen, der sich besonders gut für die elektrische Anregung eignete. Der Phosphor bestand aus einem Gemisch von 75% ZnO, 25% ZnS und 0,2% Cu, das bei 1200° C gegläht wurde. Der Schwellenwert dieses Phosphors lag bei einer Feldstärke von 3500 V/cm bei einer Frequenz von 50 Hz. — Inzwischen haben die Arbeiten Destriaus und seiner Mitarbeiter zur technischen Auswertung des Effektes in Form von Elektrolumineszenz-Leuchten geführt⁴⁾.

Nun hat vor einiger Zeit Herwelly⁵⁾ eine Arbeit veröffentlicht, in welcher er die Existenz einer „eigentlichen“ Elektrolumineszenz, also der unmittelbaren elektrischen Anregung, in Frage stellt. In einer Reihe von Experimenten glaubt

¹⁾ G. Destriau, J. Chim. physique **33**, 587 (1936).

²⁾ G. Destriau, Philos. Mag. **38**, 700 (1947); **38**, 774 (1947).

³⁾ G. Destriau u. J. Saddy, J. Physique Radium **6**, 12 (1945).

⁴⁾ E. C. Payne, E. L. Mager, C. W. Jerome, Ill. Eng. **45**, 688 (1950).

⁵⁾ A. Herwelly, Acta Physica Austriaca **5**, 30 (1951).

er nachgewiesen zu haben, daß es sich in allen Fällen, in denen eine Lumineszenz in starken elektrischen Wechselfeldern auftritt, um eine mittelbare Anregung handelt, die durch das in Gasentladungsvorgängen entstehende sichtbare und ultraviolette Licht, bzw. durch eine Elektronenstrahlung hervorgerufen wird. Die Versuchsanordnung von Destriau stellt einen Kondensator mit geschichtetem Dielektrikum dar, wobei dieses aus Gasschicht und festem Dielektrikum mit hoher Durchschlagsfestigkeit besteht. Beim Überschreiten eines Spannungsschwellwertes entstehen hierbei deutliche Entladungen und diese erregen den Leuchtstoff. Auch bei der Einbettung des Phosphors in Öl tritt durch Ölzersetzung eine Gasbildung ein, oder aber das Gas haftet den einzelnen Leuchtstoffkörnern an. Die von Destriau gemessenen Spannungsschwellwerte für das Entstehen der Elektrolumineszenz stimmen mit den Schwellwerten überein, die notwendig sind, um eine Ölzersetzung zu erzeugen. Bei dem empfindlichen Phosphor $\text{ZnS}-\text{Cu}$, Guntz Nr. 13, dürfte es sich um ein Ausleuchten des lange nachleuchtenden Phosphors im Wechselfelde handeln, da die „eingefrorene“ Phosphoreszenzenergie nicht durch Wärme ausgetrieben wurde. Eine andere mögliche Erklärung wäre eine bei diesem Phosphor besondere Begünstigung für Lufteinschlüsse. Dies sind im wesentlichen die Argumente von Herwelly. Den objektiven Nachweis führt er mit Vergleichsaufnahmen einer nichtlumineszierenden Substanz und einem Leuchtstoff.

Bei unseren Untersuchungen zur Feststellung des Schwellenwertes der Elektrolumineszenz wurden photographische Aufnahmen als Kontaktaufnahmen gemacht, d. h. der Film lag unmittelbar mit der Emulsionsschicht auf dem Leuchtstoff; hierbei erwies sich ein Mehrschichtenfarbfilm in Form des Agfa-Color-Negativfilms als besonders geeignet. Mit Hilfe dieses Films gelang es nun, eine selektive Trennung der Vorgänge an Elektrolumineszenzschichten zu erreichen.

Eigenschaften des Agfa-Colorfilms^{a)}

Zur Zeit gibt es folgende Arten des Agfa-Colorfilms:

1. Color-Umkehr-Film für Tages- und Kunstlicht. Dieser Film liefert im allgemeinen nur Unikate.
2. Color-Negativfilm für Tages- und Kunstlicht, von diesem können beliebig Kopien auf Positivmaterial hergestellt werden.
3. Color-Positivfilm, dieser ist für Kopien dem Negativfilm angepaßt.

Die Empfindlichkeit des Umkehr- und Negativfilms wird mit 13/10 bis 15/10 DIN angegeben. Der Farbfilm unterscheidet sich vom normalen Aufnahme-material dadurch, daß er drei verschieden sensibilisierte Emulsionsschichten mit verschiedenen Farbkomponenten besitzt. Durch chromogene Entwicklung entstehen an den Stellen, an denen Bromsilber reduziert worden ist, und nur an diesen Stellen, die Farbstoffe durch Kupplung der Oxydationsprodukte eines p-Phenylendiamin-Entwicklers mit den Farbkomponenten. Die Diffusionsechtheit der Komponenten und der Farbstoffe verhindert das Übertreten in andere Farbschichten. Die Dicke der einzelnen Emulsionsschicht beträgt etwa 5 bis 7μ . Den Aufbau eines Negativfilms zeigt Abb. 1.

Die oberste Schicht ist eine unsensibilisierte blauempfindliche Schicht mit der Farbkomponente gelb, die zweite Emulsionsschicht ist eine grünempfindliche

^{a)} W. Schneider, Die Farbenphotographie 1944.

Schicht mit der Farbkomponente purpur, die dritte ist schließlich eine rot-empfindliche Schicht mit der Farbkomponente blaugrün. Zwischen der ersten und der zweiten Schicht befindet sich außerdem eine Gelbfilterschicht, die eine noch vorhandene Blauempfindlichkeit der grün- und rotsensibilisierten Schichten unterdrücken soll. In ähnlicher Weise ist das Umkehr- und Positivmaterial auf-

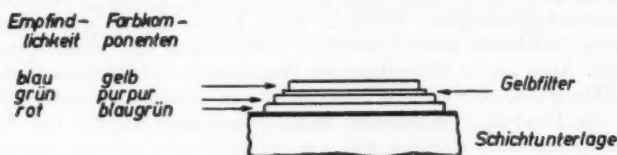


Abb. 1. Aufbau des Agfa-Color-Negativfilms

gebaut. Abb. 2a und b zeigen die spektrale Empfindlichkeit des Negativ- und Positivfilms⁶⁾. Neuere Messungen zwischen etwa 250 $m\mu$ und etwa 750 $m\mu$ sind von Goroschewski und Ponomarenko⁷⁾ durchgeführt worden. Die Maxima der Empfindlichkeit der Schichten liegen nach diesen für die blauempfindliche bei etwa 380 $m\mu$, die der grünempfindlichen bei etwa 550 $m\mu$ und die der rotempfind-

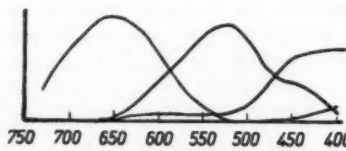


Abb. 2a. Spektrale Empfindlichkeit des Negativfilms

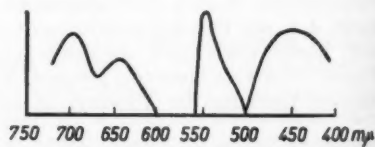


Abb. 2b. Spektrale Empfindlichkeit des Positivfilms

lichen bei etwa 630 $m\mu$. Der Positivfilm unterscheidet sich vom Negativfilm durch geringere Breite der grünsensibilisierten Spektralzone, während die rotempfindliche Zone breiter ist und bis ins infrarote Gebiet reicht. Das Maximum der rot-empfindlichen Schicht liegt bei etwa 700 $m\mu$. Die Überlappung der einzelnen Zonen ist beim Negativfilm größer als beim Positivfilm. Diese Überlappung hat sich beim Negativfilm für die Wiedergabe der natürlichen Farben als notwendig erwiesen während der Positivfilm nur auf die Absorptionsmaxima der Farbstoffe des Negativfilms abgestimmt sein muß, um Nebenabsorptionen der Farbstoffe auszuschalten. Die etwa komplementäre Farbwiedergabe des Negativfilms ist durchaus nicht notwendig, da es möglich ist, durch Anpassung des Positivmaterials eine natürliche Farbwiedergabe zu erreichen. — Das Auflösungsvermögen des Agfa-Color-Negativfilms liegt bei etwa 55 Strichen/mm, und ist nur wenig schlechter als vom Superpan-Film mit 65 Strichen/mm. Der Color-Positivfilm löst etwa 77 Striche/mm auf gegenüber dem Schwarzweiß-Positivfilm mit 90 Strichen/mm⁸⁾. — Der Farbfilm wurde im allgemeinen bisher nur zur Wiedergabe von Gegenständen in natürlichen Farben verwendet. Von uns wurde er als selektives Strahlungsnachweis-

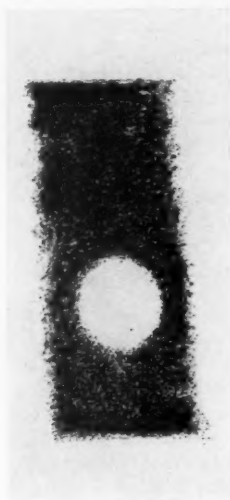
⁷⁾ Goroschewski u. Ponomarenko, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 70, 591 (1951).

⁸⁾ W. Behrendt, Wiss. Veröff. Agfa 7, 8 (1951).

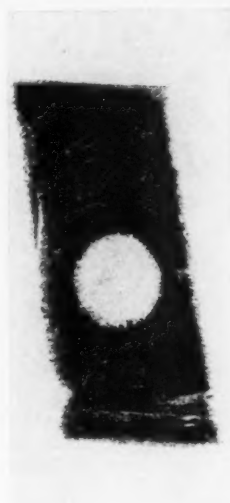
Georg Wendel: „Nachweis der Elektrolumineszenz mit Hilfe von Mehrschichten-Farbfilm“



a) 10 kV/cm



b) 25 kV/cm



c) 40 kV/cm



d) 46 kV/cm



e) 70 kV/cm



f) 100 kV/cm

Kontaktaufnahmen von Elektrolumineszenz-Leuchtstoffschichten bei verschiedenen Feldstärken auf Agfa-Color-Negativfilm.

G.

m

D

ge

lic

at

be

es

E

D

zi

m

ei

de

hi

la

w

ge

50

5

at

A

st

p

w

L

b

h

b

h

la

s

e

a

s

e

H

g

s

s

e

d

s

c

d

-

mittel benutzt, hierbei kommt es auf die Wiedergabe des Farbtons nicht an. Die verschiedenen spektralen Gebiete könnten durch verschiedene Farben sichtbar gemacht werden. Diese Anwendung ist besonders dort vorteilhaft, wo es sich um lichtschwache Objekte handelt. — Das Entwickeln des Agfa-Colorfilms wurde bisher ausschließlich von der Herstellerfirma durchgeführt, um günstigste Verarbeitungsbedingungen zu gewährleisten. Seit Freigabe des Entwicklungsverfahrens⁹⁾ ist es jedoch möglich, durch eigene Entwicklung unmittelbar nach der Aufnahme das Ergebnis zu beurteilen, was für wissenschaftliche Aufnahmen unerlässlich ist. Der Gang der Entwicklung, insbesondere des Negativfilms, ist nicht komplizierter als in der Schwarz-Weiß-Photographie. Die günstigsten Belichtungszeiten müssen natürlich von Fall zu Fall durch Probeaufnahmen ermittelt werden.

Versuchsanordnung und Ergebnisse

Die Elektrolumineszenzschichten wurden folgendermaßen hergestellt: Auf einer polierten Aluminiumplatte, die gleichzeitig als eine Elektrode dient, wurde der Leuchtstoff in sehr dünner Schicht aufgestäubt. Die Dicke dieser Schicht hängt von der Körnchengröße des Leuchtstoffes ab und war etwa $10\ \mu$. Der Film lag mit der Emulsionsschicht unmittelbar auf dem Leuchtstoff. Auf den Film wurde ein Metallstück, mit einer Bohrung zur Markierung, als zweite Elektrode gelegt. Die Elektrolumineszenzzelle wurde über einen Transformator an das 50-Hz-Wechselstromnetz angeschlossen. Die Belichtungszeiten wurden zwischen 5 und 120 Minuten variiert. Auf Einbettung des Leuchtstoffes in Öl oder ein anderes Dielektrikum wurde bewußt verzichtet, um mit Sicherheit eine UV-Anregung durch die eingeschlossene Luftschicht feststellen zu können. Zur Untersuchung gelangte im wesentlichen ein Leuchtstoff, der in ähnlicher Weise präpariert war, wie von Destriau und Saddy³⁾ angegeben wurde. ZnO und ZnS-Cu wurden zusammen bei 1200°C geglüht. Dieser Leuchtstoff zeigte eine grüne Lumineszenz ohne Nachleuchten mit einem Schwerpunkt der Emissionsbande bei etwa $530\ \text{m}\mu$. Vor der Verwendung wurde der Leuchtstoff bei 500°C ausgeheizt und im Dunkeln aufbewahrt. Die Elektrolumineszenzschicht wurde dann bei dunkelrotem Licht präpariert. — Mit diesem Leuchtstoff gelang es Schichten herzustellen, deren niedrigster Schwellenwert der Anregung bei etwa $3500\ \text{V}_{\text{eff}}/\text{cm}$ lag. Die Aufnahmen Tafel 1, Abb. a bis f, zeigen das Leuchten der Schicht bei verschiedenen Feldstärken. Wenn die Ursache der Elektrolumineszenz die in der eingeschlossenen Gasschicht entstehende UV-Strahlung ist, wie es Herwelly annimmt, so würde bei den Aufnahmen nicht nur die Lumineszenz des Leuchtstoffes, sondern auch die entstehende UV-Strahlung und sichtbares Licht der elektrischen Entladung registriert werden, und zwar in der für den spektralen Bereich entsprechenden Farbe. Jedes Leuchtstoffkörnchen würde also mit einem gelben Kranz umgeben sein. Die Aufnahmen zeigen aber, daß dies bis zu Feldstärken von etwa $35\ \text{kV}_{\text{eff}}/\text{cm}$ (Tafel 1, Abb. a u. b) nicht der Fall ist. Erst bei Feldstärken über $35\ \text{kV}_{\text{eff}}/\text{cm}$ tritt deutlich zu der Farbe des Leuchtstoffes die Farbe der entstehenden UV-Strahlung (Tafel 1, Abb. c), die schließlich bei weiterer Erhöhung der Feldstärke von etwa $45\ \text{kV}_{\text{eff}}/\text{cm}$ abzunächst an den Kanten der Metallelektrode in sichtbares Glimmen übergeht (Tafel 1, Abb. d u. e, blaugrüne Färbung). Bei $100\ \text{kV}_{\text{eff}}/\text{cm}$ (Tafel 1, Abb. f) wird durch die entstehende UV- und Glimmentladung die Farbe des Lumineszenzleuchtens vollkommen überdeckt. Diese Ergebnisse wurden durch

⁹⁾ Agfa Rezepte, Filmfabrik Agfa Wolfen 1951.

Vergleichsaufnahmen mit einer nichtlumineszierenden Substanz in Phosphorkörnchengröße und mit einem Leuchtstoff, dessen Anregung nur bei wesentlich höheren Feldstärken möglich war, nachgeprüft. Es konnten für die Entstehung der *UV*-Strahlung und des sichtbaren Glimmens immer die oben genannten Feldstärken festgestellt werden. Diese Werte gelten natürlich nur für die hier verwendete Anordnung. Durch Einbettung des Leuchtstoffes in Öl oder einem festem Dielektrikum lassen sich die Feldstärken noch wesentlich erhöhen bevor Glimmentladungen einsetzen.

Die Versuche wurden auch an anderen Leuchtstoffen, durchgeführt und zwar wurden solche Leuchtstoffe ausgewählt, die kein Nachleuchten zeigten. Insbesondere wurden die Schwellenwerte der Anregung festgestellt, so konnte an einem Zinksilikat ein Schwellenwert von 18000 V_{eff}/cm gefunden werden. Über diese Versuche soll später berichtet werden.

Herrn Prof. Dr. Rompe möchte ich für wertvolle Hinweise und sein Interesse an dieser Arbeit danken.

Berlin O 17, Institut für Strahlungsquellen der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

(Bei der Redaktion eingegangen am 17. Oktober 1952.)

Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und verwandte Probleme

Von J. Meixner

Inhaltsübersicht

Es wird die Beugung der Strahlung eines schwingenden elektrischen oder magnetischen Dipols von beliebiger Lage und Richtung an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und an der unendlichen vollkommen leitenden Ebene mit kreisförmiger Öffnung streng behandelt. Für spezielle Dipole bzw. Dipolanordnungen wird auch die Beugung am vollkommen leitenden Rotationsellipsoid untersucht.

1. Vorbemerkungen

In einer früheren Untersuchung¹⁾ wurde die strenge Lösung für das Problem der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und für das komplementäre Beugungsproblem angegeben. Inzwischen konnten von Andrejewski²⁾ hierzu auch umfangreiche numerische Ergebnisse gewonnen werden. Der Gedankengang, welcher zu dieser Lösung führte, läßt sich auf das Problem der Beugung elektromagnetischer Kugelwellen in einfacher Weise übertragen. Man erfährt dann, wie die Strahlung eines schwingenden elektrischen Dipols durch eine irgendwo im Raum befindliche vollkommen leitende Kreisscheibe gestört wird. Gleichzeitig hat man damit auf Grund des verallgemeinerten Babinet'schen Prinzips³⁾ den Fall eines schwingenden magnetischen Dipols gegenüber einer vollkommen leitenden Ebene mit kreisrundem Loch erledigt. Da man durch geeignete räumliche Anordnung von solchen Dipolen beliebige schwingende elektrische oder magnetische Multipole oder allgemeiner beliebige Antennenbilder mit vorgeschriebener Stromverteilung aufbauen kann, so sind damit viele weitere Probleme wenigstens im Prinzip gelöst.

Das Problem der Beugung einer elektromagnetischen Welle am vollkommen leitenden Rotationsellipsoid entzieht sich immer noch einer strengen Behandlung. Wir werden jedoch die Lösung für einige Fälle angeben, bei denen das gesamte (d. h. das einfallende und das gebeugte) Feld solenoidal ist, nämlich für einen elektrischen Dipol, dessen Ort und dessen Schwingungsrichtung sich auf der Rotationsachse des Ellipsoids befinden und für einen Wechselstrom in einer Kreisschleife, deren Achse mit der Rotationsachse des Ellipsoids zusammenfällt.

¹⁾ J. Meixner u. W. Andrejewski, Ann. Physik (6) 7, 157 (1950).

²⁾ W. Andrejewski, Dissertation Aachen 1952.

³⁾ J. Meixner, Z. Naturforsch. 3a, 506 (1948).

Das mathematische Hilfsmittel zur Behandlung dieser Probleme sind die Sphäroid-Funktionen. Ihre Definition, ihre Bezeichnung und ihre Eigenschaften sind in ⁴⁾ zusammengestellt. Wir verweisen auch auf eine in Vorbereitung befindliche ausführlichere Darstellung der Theorie der Sphäroid-Funktionen. Die numerische Untersuchung dieser Funktionen ist heute so weit gediehen, daß die numerische Auswertung der im folgenden gewonnenen Ergebnisse für nicht zu kurze Wellenlängen ($\lambda \gtrsim 0,6 a$, wenn a der Radius der Kreisscheibe, bzw. der Öffnung, bzw. der Radius des Fokalkreises beim abgeplatteten Rotationsellipsoid bzw. der halbe Brennpunktstand beim verlängerten Rotationsellipsoid ist) mit erträglichem Aufwand möglich ist.

2. Die Beugung der elektrischen Dipolwelle an der Kreisscheibe

Die Maxwell'schen Gleichungen für Felder mit der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ in einem Medium mit der ortsunabhängigen Dielektrizitätskonstanten ϵ und magnetischen Permeabilität μ lauten

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = i\omega \epsilon \mathbf{E}. \quad (1)$$

Die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die magnetische Feldstärke \mathbf{H} lassen sich durch den Hertz'schen Vektor Π ausdrücken:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \text{rot rot } \Pi, \quad \mathbf{H} = i\omega \text{rot } \Pi. \quad (2)$$

Jede seiner Komponenten genügt der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0. \quad (3)$$

Der Hertz'sche Vektor des schwingenden elektrischen Dipols mit dem Moment p (es enthält den Zeitfaktor $e^{i\omega t}$) lautet

$$\Pi^e = \mathbf{p} \cdot \frac{1}{4\pi R} e^{-ikR}. \quad (4)$$

R ist der Abstand vom Ort des Dipols. Wir bezeichnen Π^e als den Hertz'schen Vektor der einfallenden Welle. Ist im Raum ein beugendes Objekt vorhanden, so wird zwar der Hertz'sche Vektor am Ort des Dipols eine Singularität von der in (4) angegebenen Art besitzen, das beugende Objekt bedingt jedoch eine Störung des elektromagnetischen Feldes, die wir gebeugte Welle nennen und deren Hertz'schen Vektor wir mit Π^b bezeichnen. Der Hertz'sche Vektor der gebeugten Welle muß im ganzen Raum (auch am Ort des Dipols) regulär sein, in großer Entfernung den Charakter einer auslaufenden Kugelwelle besitzen und der Wellengleichung genügen. Das durch $\Pi^e + \Pi^b$ dargestellte Gesamtfeld muß ferner die Bedingung $E_{\text{tang}} = 0$ an der Oberfläche des vollkommen leitenden Körpers und die Kantenbedingung, wonach \mathbf{E} und \mathbf{H} an Kanten des beugenden Körpers quadratisch integrierbar sind ⁵⁾, erfüllen.

Als beugenden Körper wählen wir eine vollkommen leitende Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$ (in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten) oder $\xi = 0$ in den durch

$$x = a \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \quad y = a \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \quad z = a \xi \eta \quad (5)$$

mit $0 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$

⁴⁾ J. Meixner, Math. Nachr. Berlin 5, 1 (1951).

⁵⁾ J. Meixner, Ann. Physik (6) 6, 2 (1949).

definierten Koordinaten ξ, η, φ des abgeplatteten Rotationsellipsoids. Den Dipolort bezeichnen wir in diesen Koordinaten mit ξ_0, η_0, φ_0 . Die Dipolwelle (4) läßt sich nach Produkten von Sphäroid-Funktionen in ξ und η , sowie ξ_0 und η_0 entwickeln und es gilt mit $ka = \gamma$

$$\Pi^e = -\frac{ik}{4\pi} p \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} (2n+1) s_n^{m(1)}(-i\xi; i\gamma) s_n^{m(4)}(-i\xi_0; i\gamma) \cdot (-1)^m p s_n^m(\eta; i\gamma) p s_n^{-m}(\eta_0; i\gamma) e^{im(\varphi-\varphi_0)} \quad (6)$$

für $\xi < \xi_0$; für $\xi > \xi_0$ sind hierin ξ und ξ_0 zu vertauschen. Zur Abkürzung für diese Entwicklung schreiben wir

$$\Pi^e = -\frac{ik}{4\pi} p \sum_m k_m e^{im(\varphi-\varphi_0)} \quad (7)$$

und vereinbaren, daß unter \sum_m stets die Summe von $m = -\infty$ bis $+\infty$ zu verstehen ist.

Wir behaupten nun, daß die gebeugte Welle sich durch

$$\Pi^b = \Pi^1 + \Pi^2 \quad (8)$$

darstellen läßt, wenn Π^1 und Π^2 in folgender Weise definiert sind:

$$\Pi_x^1 \pm i \Pi_y^1 = \frac{ik}{4\pi} (p_x \pm i p_y) \cdot \sum_m L_m \cdot e^{im(\varphi-\varphi_0)}, \quad (9)$$

$$\Pi_x^2 = \frac{ik}{4\pi} p_x \sum_m M_m e^{im(\varphi-\varphi_0)}, \quad \Pi_y^2 = 0, \quad (10)$$

$$\Pi_x^2 \pm i \Pi_y^2 = k e^{\pm i\varphi} \sum_m u_m N_m \pm 1 \cdot e^{im(\varphi-\varphi_0)} \quad (11)$$

mit

$$L_m = \sum_{\eta} (2n+1) \frac{s_n^{m(1)}(-i0)}{s_n^{m(4)}(-i0)} s_n^{m(4)}(-i\xi) s_n^{m(4)}(-i\xi_0) (-1)^m p s_n^m(\eta) p s_n^{-m}(\eta_0), \quad (12)$$

$$M_m = \sum_{\eta} (2n+1) \frac{s_n^{m(1)}(-i0)'}{s_n^{m(4)}(-i0)'} s_n^{m(4)}(-i\xi) s_n^{m(4)}(-i\xi_0) (-1)^m p s_n^m(\eta) p s_n^{-m}(\eta_0), \quad (13)$$

$$N_m = \sum_{\eta} (2n+1) i^n \frac{s_n^{m(1)}(-i0)}{s_n^{m(4)}(-i0)} s_n^{m(4)}(-i\xi) (-1)^m p s_n^m(\eta) p s_n^{-m}(0), \quad (14)$$

$$u_m [\bar{N}_{m-1} + \bar{N}_{m+1}] = \frac{1}{2\pi} p_x \bar{M}_m - \frac{i}{4\pi} (p_x + i p_y) e^{-i\varphi_0} \bar{L}_{m+1} - \frac{i}{4\pi} (p_x - i p_y) e^{i\varphi_0} \bar{L}_{m-1}, \quad (15)$$

$$\bar{L}_m = i\gamma \frac{\partial L_m}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\eta=0} = \sum_{\eta} (2n+1) \frac{s_n^{m(4)}(-i\xi_0)}{s_n^{m(4)}(-i0)} (-1)^m p s_n^m(0) p s_n^{-m}(\eta_0), \quad (16)$$

$$\bar{M}_m = \gamma \frac{\partial M_m}{\partial \eta} \Big|_{\xi=\eta=0} = - \sum_{\eta} (2n+1) \frac{s_n^{m(4)}(-i\xi_0)}{s_n^{m(4)}(-i0)'} (-1)^m p s_n^m(0)' p s_n^{-m}(\eta_0), \quad (17)$$

$$\bar{N}_m = i\gamma \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\eta=0} = \sum_{\eta} (2n+1) \frac{i^n}{s_n^{m(4)}(-i0)} (-1)^m p s_n^m(0) p s_n^{-m}(0). \quad (18)$$

In den Sphäroid-Funktionen haben wir das zweite Argument $i\gamma$ zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen. Ein Strich am Funktionssymbol bedeutet

Ableitung nach dem ersten Argument. g bzw. u unter dem Summationszeichen bedeutet Summation über alle $n \geq |m|$, für die $n - m =$ gerade bzw. = ungerade ist. Die Größen L_m, M_m, N_m und $\bar{L}_m, \bar{M}_m, \bar{N}_m$ bleiben ungeändert, wenn man m durch $-m$ ersetzt.

Die Summen in (10) bis (18) konvergieren gleichmäßig und absolut im ganzen Raum, falls $\xi_0 > 0$, d. h. falls sich der Dipol außerhalb der Kreisscheibe befindet; Π^b ist daher überall regulär und endlich. Ferner hat Π^b den Charakter einer auslaufenden Kugelwelle, da jeder Summand in (12), (13), (14) eine Sphäroid-Funktion $s_n^{m(4)}(-i\xi)$ enthält, die sich für große ξ (d. h. große r mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) wie $e^{-i\gamma\xi} \cdot i^{n+1}/(\gamma\xi) \rightarrow e^{-ikr} i^{n+1}/(kr)$ verhält. Schließlich genügt Π^b der Wellengleichung, da jeder Summand eine Wellenfunktion $s_n^{m(4)}(-i\xi) p_s^m(\eta) e^{im\varphi}$ enthält.

Nun ist noch die Erfüllung der Oberflächenbedingung und der Kantenbedingung zu prüfen. Die Oberflächenbedingung verlangt $E_x = 0, E_y = 0$ für $\xi = 0$ d. h. für $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$. Wegen (2) bedeutet dies

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right) + k^2 \Pi_x &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right) + k^2 \Pi_y &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Aus (6), (7), (9), (10), zusammen mit (12), (13) folgt

$$L_m = K_m, \quad \frac{\partial M_m}{\partial \xi} = \frac{\partial K_m}{\partial \xi} \quad \text{für } \xi = 0. \quad (20)$$

Hieraus folgt

$$\Pi_x^e + \Pi_x^i = 0, \quad \Pi_y^e + \Pi_y^i = 0, \quad \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_z^i}{\partial z} = 0 \quad \text{für } \xi = 0, \quad (21)$$

letzteres wegen $\partial/\partial z = \frac{1}{a\eta} \partial/\partial \xi \cdot \Pi^e + \Pi^i$ erfüllt also für sich die Gln. (19). Es bleibt zu zeigen, daß auch Π^i für sich diese Gleichungen erfüllt. Nun ist aber $\Pi_z^i = 0$ und für $\Pi_x^i \pm i\Pi_y^i$ kann man wegen

$$\begin{aligned} N_m|_{\xi=0} &= \sum_g (2n+1) i^n s_n^{m(1)}(-i0) (-1)^m p_s^m(\eta) p_{s-n}^{-m}(0) \\ &= i^m J_m(\gamma \sqrt{1-\eta^2}) \end{aligned} \quad (22)$$

schreiben

$$\Pi_x^i \pm i\Pi_y^i = k e^{\pm i\varphi} \sum_m u_m i^{m \pm 1} J_{m \pm 1}(k\rho) e^{im(\varphi - \varphi_0)}, \quad (23)$$

wenn g, φ ebene Polarkoordinaten in der Ebene $z = 0$ bedeuten. Es ist nun leicht zu zeigen, daß bereits der Koeffizient von jedem u_m in $\Pi_x \pm i\Pi_y$ für sich den Gln. (19) genügt.

Die Kantenbedingung ist gleichwertig mit den beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} [e^{i\varphi} (\Pi_x - i\Pi_y) + e^{-i\varphi} (\Pi_x + i\Pi_y)] + 2 \frac{\partial \Pi_z}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} [e^{i\varphi} (\Pi_x + i\Pi_y) + e^{-i\varphi} (\Pi_x - i\Pi_y)] - 2 \frac{\partial \Pi_z}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{für } \xi = \eta = 0. \quad (24)$$

Es genügt hierin $\Pi^b = \Pi^i + \Pi^e$ einzusetzen, da Π^e wegen der Regularität der einfallenden Welle am Rande der Kreisscheibe für sich der Kantenbedingung genügt. Die zweite dieser Bedingungen ist von selbst erfüllt, da $s_n^{m(1)}(-i0) = p_s^m(0) = 0$ für $n - m =$ ungerade und $s_n^{m(1)}(-i0)' = p_s^m(0)' = 0$ für $n - m =$ gerade

und daher die nach η differenzierten Reihen (12) und (14) und die nach ξ differenzierte Reihe (13) für $\xi = \eta = 0$ gliedweise verschwinden. Die erste dieser Bedingungen führt unter Verwendung der Abkürzungen (16), (17), (18) gerade auf die Bestimmungsgleichung (15) für die u_m .

Wir diskutieren kurz noch einige Spezialfälle des allgemeinen Problems.

1. Läßt man den schwingenden Dipol ins Unendliche rücken, so ergeben sich für $p_z = 0$ gerade die früheren Formeln für die Beugung einer ebenen Welle an der Kreisscheibe (vgl. ¹⁾). Für $p_x = p_y = 0$, $p_z \neq 0$ ergibt sich jedoch eine neue Darstellung der Beugung einer ebenen Welle für den Fall, daß der elektrische Vektor in der Einfallsebene schwingt.

2. Liegt der schwingende elektrische Dipol auf der z -Achse (etwa $\eta_0 = +1$), so treten erhebliche Vereinfachungen ein. Dann ist $L_m = \bar{L}_m = M_m = \bar{M}_m = 0$ für $m \neq 0$ und es wird

$$\left. \begin{aligned} 2\bar{N}_1 u_0 &= \frac{1}{2\pi} p_z \bar{M}_0, \\ (\bar{N}_0 + \bar{N}_2) u_1 &= -\frac{i}{4\pi} (p_x - i p_y) e^{i\varphi_0} \bar{L}_0, \\ (\bar{N}_0 + \bar{N}_2) u_{-1} &= -\frac{i}{4\pi} (p_x + i p_y) e^{-i\varphi_0} \bar{L}_0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

3. Ist wieder $\eta_0 = 1$, aber $p_x = p_y = 0$ und überdies $\xi_0 > 1$, so liegt die Kreisscheibe in der Richtung eines Minimums des Strahlungsdiagramms des Dipols; dann ist die gebeugte Amplitude proportional zu ξ_0^{-2} statt wie sonst zu ξ_0^{-1} . Der Beweis hierfür ist an den obigen Gleichungen nicht einfach zu führen, wir können ihn aber übergehen, da wir dieses Ergebnis unten auf andere und einfachere Weise gewinnen werden.

Mit dem Beugungsproblem für den elektrischen Dipol ist grundsätzlich auch jenes für beliebige elektrische und magnetische Multipole miterledigt. So erhält man den Hertzschen Vektor des magnetischen Dipols im freien Raum, indem man auf den Hertzschen Vektor des elektrischen Dipols im freien Raum die Operation $-\text{rot}$ bezüglich der Koordinaten x, y, z oder $+\text{rot}$ bezüglich der Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Dipolortes anwendet (wir bezeichnen die Operation rot bezüglich x_0, y_0, z_0 mit rot_0). Entsprechend gewinnt man aus der obigen Lösung des Beugungsproblems für den elektrischen Dipol jene für den magnetischen Dipol mit dem Moment $m = -i\omega p$, indem man statt Π den Hertzschen Vektor $\text{rot}_0 \Pi$ verwendet. Das magnetische Moment m ist hier so definiert, daß das magnetische Nahfeld $H = -\text{grad}(m \cdot r)/4\pi r^3$ lautet.

3. Das komplementäre Beugungsproblem

Aus der Lösung $\Pi^e + \Pi^b$ des oben behandelten Beugungsproblems leiten wir nun ein anderes elektromagnetisches Feld her. Es sei $z_0 > 0$. Dann setzen wir

$$E = -i\omega \text{rot}(\Pi^e + \Pi^r + \Pi^b), \quad H = \frac{1}{\mu} \text{rot rot}(\Pi^e + \Pi^r + \Pi^b), \quad (z \geq 0), \quad (26)$$

$$E = i\omega \text{rot} \Pi^b, \quad H = -\frac{1}{\mu} \text{rot rot} \Pi^b \quad (z \leq 0). \quad (27)$$

Π^e ist in (4) definiert, Π^b setzt sich aus Π^1 und Π^2 nach (9) (10), (11) zusammen. Π^r ist durch

$$\Pi^r = p' \frac{1}{4\pi R'} e^{-ikR'} \quad (28)$$

gegeben mit

$$\mathbf{p}' = \{p_x, p_y, -p_z\}, R'^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2. \quad (29)$$

Die einfallende Welle Π^e stellt jetzt den Fitz-Gerald'schen Vektor des Feldes eines schwingenden magnetischen Dipols vom Moment $\mathbf{m} = \mathbf{p}/\mu$ dar, Π^r ist die von der als vollkommen leitend gedachten Ebene $z = 0$ reflektierte Dipolwelle.

Nach dem verallgemeinerten Babinetschen Prinzip³⁾ löst das elektromagnetische Feld (26), (27) das Beugungsproblem für die Strahlung eines im Halbraum $z > 0$ befindlichen magnetischen Dipols vom Moment \mathbf{p}/μ , der sich einer vollkommen leitenden Ebene ($\eta = 0$) mit kreisrunder Öffnung vom Radius a ($\xi = 0$) gegenüber befindet. Das durch (26) für $z \geq 0$ und durch (27) für $z \leq 0$ dargestellte Feld ist mit allen seinen Ableitungen in der Öffnung stetig.

Die Darstellung (26), (27) des elektromagnetischen Feldes scheint zu versagen, wenn der magnetische Dipol in der Öffnung liegt, d. h. wenn $\xi_0 = 0$ ist. Wir wollen diesen Grenzfall hier nicht ausführlich behandeln, sondern nur an einem Spezialfall zeigen, daß und in welcher Weise aus den allgemeinen Formeln auch hier das richtige Ergebnis herauskommt.

Der magnetische Dipol möge mit seiner Schwingungsrichtung in der Öffnung liegen; es sei also $\xi_0 = 0$ und $p_z = 0$. Die elektrischen Feldlinien des freien magnetischen Dipols sind Kreise mit einer Geraden der Richtung \mathbf{p} durch den Dipol als Achse. Sie stehen also bei der angenommenen speziellen Lage und Orientierung des Dipols senkrecht auf der Ebene $z = 0$. Wird irgendein Stück dieser Ebene durch eine vollkommen leitende Fläche nachgebildet, so ist also bereits durch das Dipolfeld allein die Bedingung $E_{\text{tang}} = 0$ auf dieser Fläche erfüllt; daher gibt es keine gebeugte Welle. Dies sagen auch unsere Formeln aus. Es ist für $\xi_0 = 0$ und $p_z = 0$ nämlich $K_m = L_m$, daher $-\Pi_x^r = \Pi_x^e = \Pi_x^r$, $-\Pi_y^r = \Pi_y^e = \Pi_y^r$, $\Pi_z^e = \Pi_z^r = 0$, während $\Pi_z^e = \Pi_z^r = 0$ ist. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $\bar{L}_m = 0$ und damit $u_m = 0$ ist, dann folgt aus (11) $\Pi_z^e \pm i \Pi_y^e = 0$ und damit die Behauptung. Für $\xi_0 = 0$ ist aber

$$\bar{L}_m = \sum_y (2n + 1) (-1)^m p_s^m(0) p_s^{-m}(\eta_0). \quad (30)$$

Dies ist die Bilinearformel der orthogonalen und normierten Sphäroid-Funktionen $p_s^m(\eta)$; sie hat den Wert $2\delta(\eta_0)$. Diese Diracsche δ -Funktion verschwindet außer in dem uninteressanten Fall $\eta_0 = 0$, d. h. außer wenn sich der Dipol am Rand der Öffnung befindet.

Aus den Formeln (26) und (27) ergibt sich wieder das elektromagnetische Feld für die Beugung einer elektrischen Dipolwelle, indem man die Vektoren Π^e, Π^r, Π^b durch die Vektoren $\text{rot}_0 \Pi^e, \text{rot}_0 \Pi^r, \text{rot}_0 \Pi^b$ ersetzt, d. h. die Operation rot bezüglich der Koordinaten des Dipolortes durchführt. Das Moment dieses elektrischen Dipols ist $i\omega \varepsilon \mathbf{p}$.

4. Beugungsprobleme mit solenoidalen elektromagnetischen Feldern

Man nennt ein elektromagnetisches Feld solenoidal, wenn einer der beiden Feldvektoren, E, H nur eine Komponente in der Azimutrichtung, der andere nur Komponenten senkrecht zur Azimutrichtung hat. Dann sind beide Vektoren unabhängig vom Azimut φ .

Für einen elektrischen oder magnetischen Dipol auf der Verlängerung der Rotationsachse eines vollkommen leitenden Rotationsellipsoids ist das elektro-

magnetische Feld solenoidal, wenn die Dipolrichtung in die Richtung der Rotationsachse fällt. Ist das Rotationsellipsoid zu einer Kreisscheibe abgeplattet, so ergeben sich Spezialfälle unserer oben behandelten Probleme, aber in anderer Schreibweise. So ist nun das Feld im Falle des magnetischen Dipols durch einen Hertzschen Vektor, das Feld des elektrischen Dipols durch einen Fitz-Gerald'schen Vektor dargestellt. Die Formeln werden dadurch erheblich einfacher, aber diese Darstellung des elektromagnetischen Feldes läßt sich nicht auf Beugungsprobleme am Rotationsellipsoid mit nicht rotationssymmetrischen (d. h. nicht solenoidalen) Feldern verallgemeinern. Jedoch lassen sich außer den beiden genannten Beispielen auch die Felder für Dipolverteilungen berechnen, die rotationssymmetrisch zur Achse des Rotationsellipsoids sind. Ein solches Beispiel werden wir explicit angeben.

Die Umrechnung der im folgenden gegebenen Lösungen in die Lösungen der entsprechenden Spezialfälle der oben behandelten Probleme ist nicht direkt durchführbar; der mathematische Grund hierfür ist das Fehlen von Rekursionsformeln für Sphäroid-Funktionen mit benachbarten Indices. Die Äquivalenz dieser Lösungen folgt jedoch unmittelbar aus dem Eindeutigkeitssatz (vgl. 5)).

Wir behandeln im folgenden die Beugung am abgeplatteten Rotationsellipsoid. Seine Rotationsachse liege in der z -Achse, sein Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt. Der Radius seines Fokalkreises sei a . Die mit diesem Wert von a definierten elliptischen Koordinaten (5) enthalten die Oberfläche des Rotationsellipsoids als eine der Koordinatenflächen $\xi = \text{constant}$, etwa $\xi = \xi_1$.

Aus den Ergebnissen für die Beugung am abgeplatteten Rotationsellipsoid erhalten wir dann jene für die Beugung am verlängerten Rotationsellipsoid, indem wir ξ durch $i\xi$, γ durch $-i\gamma$, a durch $-ia$, $\sqrt{\xi^2 + 1}$ durch $i\sqrt{\xi^2 - 1}$ ersetzen. Damit gehen auch die Gln. (5) in die Definitionsgleichungen für die Koordinaten des verlängerten Rotationsellipsoids über.

Wir nehmen nun einen elektrischen Dipol im Punkte $\xi_0 > \xi_1$, $\eta_0 = 1$ (vgl. (5)) mit $p_x = p_y = 0$ an. Aus der Darstellung (3) des Dipolfeldes durch den Hertz'schen Vektor Π^e berechnet sich nach (2) das Magnetfeld. Es besitzt nur eine φ -Komponente

$$H_\varphi^e = -\frac{1}{4\pi} \omega k^3 p_z P_1^1(\cos \Theta) \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} H_{1/2}^{(3)}(kR). \quad (31)$$

$H_{1/2}^{(3)}$ ist die zweite Hankelsche Funktion, R , Θ , φ sind Kugelkoordinaten vom Ort des Dipols aus, so daß $\Theta = 0$ die Richtung der positiven z -Achse bedeutet. H_φ^e läßt sich in folgender Weise nach Sphäroid-Funktionen entwickeln:

$$H_\varphi^e = -\frac{\omega k^3 p_z}{4\pi\gamma} (\xi_0^2 + 1)^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) s_n^{1(4)} (-i\xi_0) s_n^{1(1)} (-i\xi) p s_n^1(\eta) A_n^{-1}, \quad (\xi < \xi_0). \quad (32)$$

Für $\xi > \xi_0$ sind ξ und ξ_0 in den Argumenten der Sphäroid-Funktionen zu vertauschen; der Faktor $(\xi_0^2 + 1)^{-1/2}$ bleibt ungeändert. A_n^{-1} ist in *) definiert. Das zweite Argument $i\gamma$ der Sphäroid-Funktionen wird wieder zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen.

Das Magnetfeld der gebeugten Welle ergibt sich daraus unmittelbar zu

$$H_\varphi^b = \frac{\omega k^3 p_z}{4\pi\gamma} (\xi_0^2 + 1)^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{[\sqrt{\xi_0^2 + 1} s_n^{1(1)} (-i\xi_0)]'}{[\sqrt{\xi_0^2 + 1} s_n^{1(4)} (-i\xi_0)]} s_n^{1(4)} (-i\xi) \cdot s_n^{1(4)} (-i\xi_0) p s_n^1(\eta) A_n^{-1} \quad (33)$$

für $\xi < \xi_0$ und entsprechend für $\xi > \xi_0$; denn die Randbedingung der vollkommenen Leitfähigkeit bedeutet, daß die φ - und η -Komponente von $\text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } (\mathbf{H}^e + \mathbf{H}^b)$ verschwinden, d. h. aber

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{\xi^2 + 1} H_\varphi) = 0 \quad \text{für } \xi = \xi_1. \quad (34)$$

Diese Lösung (33) wurde für den Fall $\xi_1 = 0$ bereits von Leitner und Spence⁹⁾ angegeben. Sie haben aus ihr durch Integration über eine geeignete Dipolverteilung längs der z -Achse die Abstrahlung einer Viertelwellenlänge mit sinusoidaler Stromverteilung über dem Mittelpunkt einer vollkommen leitenden Kreisscheibe berechnet und auch numerische Ergebnisse mitgeteilt.

Aus (33) gewinnen wir das Magnetfeld einer Linearantenne, die sich in der Rotationsachse des Rotationsellipsoids von

$$z' = a \xi_0' \text{ bis } z'' = a \xi_0'' \quad (\xi_1 \leq \xi_0' < \xi_0'', \eta_0 = 1)$$

erstreckt und auf der ein vorgeschriebener Strom (δ = Phasenkonstante)

$$I(z, t) = I_0 \sin(kz + \delta) e^{i\omega t} = I_0 \sin(\gamma \xi_0 + \delta) e^{i\omega t}$$

fließt. Ihm entspricht eine Dipolverteilung längs der z -Achse von z' bis z'' mit dem Dipolmoment

$$I_0 \sin(\gamma \xi_0 + \delta) \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} a d\xi_0 \quad (\xi_0' \leq \xi_0 \leq \xi_0'')$$

im Linienelement $dz = a d\xi_0$ der Antenne. Dieser Ausdruck ist für p_z in (33) einzusetzen und dann ist über ξ_0 von ξ_0' bis ξ_0'' zu integrieren. Die Integration läßt sich gliedweise ausführen mittels der Beziehung⁹⁾

$$\begin{aligned} \lambda_n^1(i\gamma) \int_{\xi_0'}^{\xi_0''} (\xi_0^2 + 1)^{-1/2} s_n^{(4)}(-i\xi_0, i\gamma) \sin(\gamma \xi_0 + \delta) d\xi_0 \\ = [\sin(\gamma \xi_0 + \delta) \frac{d}{d\xi_0} \{(\xi_0^2 + 1)^{1/2} s_n^{(4)}(-i\xi_0, i\gamma)\} - \gamma \cos(\gamma \xi_0 + \delta) (\xi_0^2 + 1)^{1/2} \\ \cdot s_n^{(4)}(-i\xi_0, i\gamma)]_{\xi_0'}^{\xi_0''}. \end{aligned}$$

$\lambda_n^1(i\gamma)$ ist der Eigenwertparameter der Differentialgleichung der Sphäroidfunktionen (vgl. 4)).

Für den Grenzfall der Kreisscheibe ($\xi_1 = 0$) findet sich das letzte Ergebnis mit zahlreichen numerischen Einzelheiten bei Leitner und Spence⁹⁾. Der Grenzfall der Kugel ($\gamma \rightarrow 0$, $\gamma \xi \rightarrow k r$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) ist mit einer anderen Methode von Papas und King⁷⁾ untersucht worden.

Aus dem Magnetfeld $H_\varphi = H_\varphi^e + H_\varphi^b$ lassen sich sehr einfach die in der ellipsoidoberfläche induzierten Ströme berechnen, und zwar ist $i_\varphi = 0$, $i_\eta = H_\varphi(\xi_1)$, wenn i die Flächenstromdichte auf dem Ellipsoid und i_η , i_φ ihre Komponenten in den Koordinaten η , φ bedeuten.

Die Kantenbedingung im Fall der Kreisscheibe $\xi_1 = 0$ braucht nicht besonders berücksichtigt zu werden; sie ist hier sowohl für \mathbf{H} wie für \mathbf{E} von selbst erfüllt. Das komplementäre Problem zu diesem Fall erledigt sich entsprechend zu (26) und (27), indem man dort statt $i\omega \text{rot } \Pi^e$, $i\omega \text{rot } \Pi^r$, $i\omega \text{rot } \Pi^b$ nun \mathbf{H}^e , \mathbf{H}^r ,

⁹⁾ A. Leitner u. R. D. Spence, J. appl. Physics **21**, 1001 (1950).

⁷⁾ C. H. Papas u. R. King, J. appl. Physics **19**, 808 (1948).

H^b einsetzt. H^r bestimmt sich aus (32), indem man jedes Reihenglied dort mit $(-1)^n$ multipliziert. —

Als weiteres Beispiel behandeln wir das Gegenstück zum vorhergehenden Problem, die Beugung der Strahlung eines schwingenden magnetischen Dipols, der nach Ort und Richtung auf der Rotationsachse des vollkommen leitenden beugenden Rotationsellipsoids $\xi = \xi_1$ liegt. Wir verallgemeinern dieses Problem noch etwas, indem wir statt des magnetischen Dipols einen elektrischen Ringstrom $J = J_0 e^{i\omega t}$ in einer zum Äquator des Ellipsoids coaxialen Kreisschleife $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ annehmen. Auch hier ist das elektromagnetische Feld solenoidal, die elektrische Feldstärke hat nur eine φ -Komponente E_φ , während die φ -Komponente des Magnetfeldes verschwindet.

Wir gehen vom Hertzschen Vektor eines elektrischen Dipols im freien Raum an der Stelle ξ_0, η_0, φ_0 mit dem Moment $p_x = -p \sin \varphi_0$, $p_y = p_0 \cos \varphi_0$, $p_z = 0$ aus und gewinnen aus (6)

$$\Pi_x \pm i \Pi_y = \pm \frac{k}{4\pi} p e^{i\varphi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=|n|}^{\infty} (2n+1) s_n^{m(1)} (-i\xi) s_n^{m(4)} (-i\xi_0) (-1)^m \cdot p s_n^m(\eta) p s_n^{-m}(\eta_0) e^{im(\varphi-\varphi_0)} \quad (35)$$

für $\xi < \xi_0$ und denselben Ausdruck mit Vertauschung von ξ und ξ_0 für $\xi > \xi_0$. Wir denken uns nun den ganzen Kreis $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ mit solchen elektrischen Dipolen belegt, deren Richtung also in jedem Punkt tangential zu diesem Kreis ist, und setzen p gleich dem Dipolmoment der Längeneinheit. Diese Dipolbelegung entspricht einem Kreisstrom der Stärke

$$J = \dot{p} = i\omega p. \quad (36)$$

Ihr Hertzscher Vektor ergibt sich durch Multiplikation von (35) mit dem Linienelement $a \sqrt{(\xi_0^2 + 1)(1 - \eta_0^2)} d\varphi_0$ des Kreises und Integration über φ_0 von 0 bis 2π . Alle Glieder mit $m \neq \pm 1$ fallen dann weg und es bleibt, wenn wir die allein vorhandene φ -Komponente des integrierten Hertzschen Vektors mit π_φ^e bezeichnen,

$$\pi_\varphi^e = \frac{i}{4} \gamma p \sqrt{(\xi_0^2 + 1)(1 - \eta_0^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) s_n^{1(1)} (-i\xi) s_n^{1(4)} (-i\xi_0) p s_n^1(\eta) p s_n^{-1}(\eta_0) \quad (37)$$

für $\xi < \xi_0$. Für $\xi > \xi_0$ sind ξ und ξ_0 in den beiden Sphäroid-Funktionen zu vertauschen.

Wegen $\text{div } \pi_\varphi^e = 0$ folgt aus (2) $E_\varphi^e = \frac{1}{\varepsilon} k^2 \pi_\varphi^e$. Wegen $E_\varphi^e + E_\varphi^b = 0$ auf dem Rotationsellipsoid $\xi = \xi_1$ folgt weiter

$$E_\varphi^b = \frac{1}{\varepsilon} k^2 \pi_\varphi^b = -\frac{i}{4\varepsilon} k^2 \gamma p \sqrt{(\xi_0^2 + 1)(1 - \eta_0^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{s_n^{1(1)}(-i\xi_1)}{s_n^{1(4)}(-i\xi_1)} \cdot s_n^{1(4)}(-i\xi) s_n^{1(1)}(-i\xi_0) p s_n^1(\eta) p s_n^{-1}(\eta_0). \quad (38)$$

Artet das Rotationsellipsoid in eine Kreisscheibe aus, so ist $\xi_1 = 0$ zu setzen. Auch hier läßt sich die Lösung des komplementären Beugungsproblems wieder unmittelbar angeben: Aus π_φ^e ergibt sich π_φ^r , indem man jedes Reihenglied in (37) mit $(-1)^{n+1}$ multipliziert. Es wird dann nach (26) und (27) für $\eta_0 > 0$

$$\left. \begin{aligned} H_\varphi &= \frac{k^3}{\mu} (\pi_\varphi^e + \pi_\varphi^r + \pi_\varphi^b) & \text{für } z \geq 0 \\ H_\varphi &= -\frac{k^3}{\mu} \pi_\varphi^b & \text{für } z \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Das zugehörige elektrische Feld ergibt sich aus (1).

Alle in diesem Abschnitt auftretenden Reihen für das gebeugte Feld konvergieren absolut und gleichmäßig für $\xi \geq \xi_1$, $\xi_0 > \xi_1$, d. h., wenn der Dipol außerhalb des beugenden Ellipsoids liegt.

5. Bemerkungen zur numerischen Auswertung

Wegen der großen Zahl der in der allgemeinen Lösung (9) bis (18) auftretenden Parameter $\xi_0, \eta_0, \varphi_0, p_x, p_y, p_z, \lambda/a$ wird sich ihre numerische Auswertung immer auf spezielle Fälle beschränken müssen. Wir verzichten hier ganz auf die Wiedergabe von numerischen Ergebnissen und verweisen wegen der Beugung einer senkrecht auf eine Kreisscheibe bzw. auf eine kreisrunde Öffnung in der unendlich ausgedehnten Ebene einfallenden ebenen Welle auf Andrejewski²⁾, der viele numerische Einzelheiten für das Nahfeld und das Fernfeld im Bereich $\gamma \leq 10$ berechnet hat. Um die Konvergenz der in unseren Ergebnissen auftretenden Reihen beurteilen zu können, seien jedoch noch einige Abschätzungen der Sphäroid-Funktionen für große n angeführt. Es gelten folgende Beziehungen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|p_n^m(\eta)|} \leq 1 \quad (40)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! |s_n^{m(1)}(-i\xi)|} \leq \left| \frac{\gamma}{4} (\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) \right|, \quad (41)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} |s_n^{m(4)}(-i\xi)|} \leq \left| \frac{\gamma}{4} (\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) \right|^{-1}. \quad (42)$$

In den letzten beiden Abschätzungen können statt der Sphäroid-Funktionen auch ihre Ableitungen nach ξ stehen.

Ist $\xi \gg 1$, so kann man in allen Reihen für die Sphäroid-Funktionen vierter Art mit dem Argument ξ oder ξ_0 setzen:

$$s_n^{m(4)}(-i\xi; i\gamma) \sim i^{n+1} e^{-i\gamma\xi/\gamma\xi}, \quad (43)$$

da die späten Reihenglieder, für welche die an sich schlechtere Abschätzung (42) gilt, wenn nur ξ bzw. ξ_0 groß genug ist, einen vernachlässigbaren Beitrag liefern.

Die numerische Auswertung der gefundenen Ergebnisse ist insbesondere für große ξ oder ξ_0 an Hand der Tabellen von Stratton, Morse, Chu und Hutner³⁾, welche bis $\gamma = 5$ reichen, verhältnismäßig einfach. Für größere Werte von γ gibt es noch keine ausführlicheren Tabellen. Solche wären wenigstens bis $\gamma = 10$ erwünscht, da die Anzahl der benötigten Reihenglieder in unseren Formeln dann noch klein genug ist, um ihre numerische Berechnung praktisch durchführbar erscheinen zu lassen.

²⁾ J. A. Stratton, P. M. Morse, L. J. Chu und R. A. Hutner, Elliptic cylinder and spheroidal wave functions. New York 1941.

Aachen, Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Aachen.

(Bei der Redaktion eingegangen am 30. Oktober 1952.)

Zur Homogenisierung von Ultraschallfeldern in Wasser

Von A. Eckardt, O. Lindig und K. Nitzsche

(Mit 7 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird die Ursache der auf Ultraschall-Leuchtschirmbildern auftretenden Schlieren untersucht. Sie werden durch ungleichmäßige Erwärmung der Übertragungsflüssigkeit im Ultraschallfeld hervorgerufen. Bei Verwendung eines Wasser-Alkoholgemisches 100:17 lassen sie sich vollkommen vermeiden.

Bei unseren laufenden Untersuchungen an ZnS-Schirmen zur akustisch-optischen Bildwandlung konnten bisher klare Bilder des Schallfeldes nur in beschränktem Zeitraum nach Einschalten des Gebers erzielt werden. Eine etwa 1 Sekunde nach Einschalten des Gebers auftretende wolkenartige Struktur¹⁾ beeinträchtigte stark weitere Beobachtungen. Als Grund hierfür wurden temperaturbedingte Inhomogenitäten der Schallgeschwindigkeit im Schallfeld erkannt, die durch Anwendung eines geeigneten Alkohol-Wasser-Gemisches vermieden werden konnten.

Bei unserer Versuchsanordnung war ein Schwingquarz von 6 cm Durchmesser an einem entsprechenden Ausschnitt in der Bodenplatte eines kreiszylindrischen Vertikalgefäßes gehalten. Er strahlte seine 3. Oberschwingung von 4,2 MHz in entgastem Wasser als schallübertragendes Medium ab. Auf der Wasseroberfläche (Abstand etwa 10 cm) befand sich der zu untersuchende ZnS-Schirm als Bildwandler¹⁾. Das nach Einschalten des Gebers erscheinende Interferenznahfeld des Quarzes wurde von allen Schirmen nur für etwa

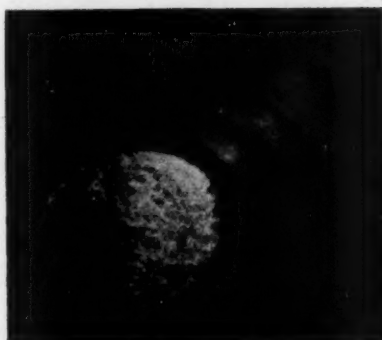


Abb. 1. Störungsfreies Reliefbild, 1 sec nach Einschalten des Schallgebers

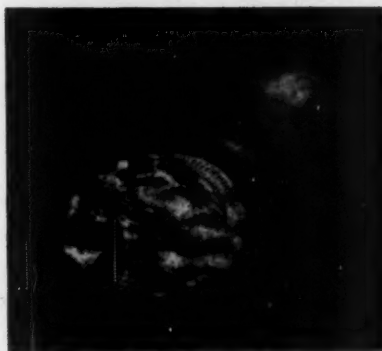


Abb. 2. Reliefbild nach 5 sec

¹⁾ A. Eckardt u. O. Lindig, Ann. Physik 7, 410 (1950).

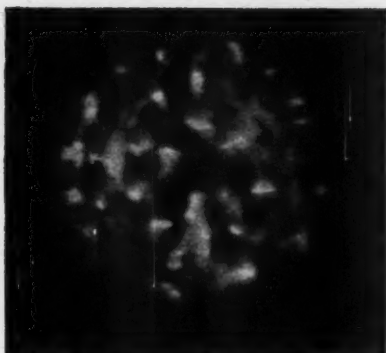


Abb. 3. Schallfeldbild des ZnS-Schirmes, analog Abb. 2

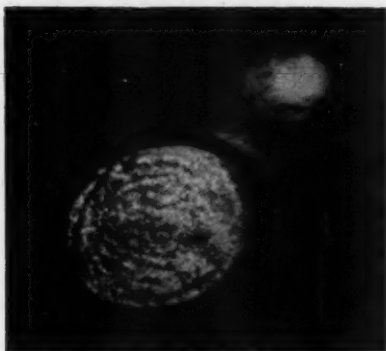


Abb. 4. Reliefbild nach 5 sec bei Wasser-Alkohol-Gemisch

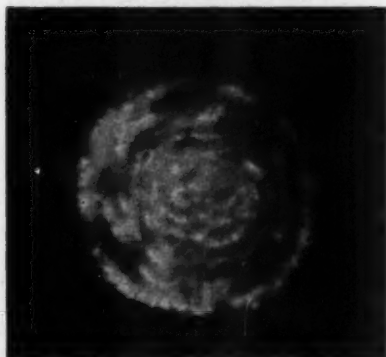


Abb. 5. Schallfeldbild des ZnS-Schirms, analog Abb. 4

1 Sekunde störungsfrei wiedergegeben. Eine sich sodann ausbildende wolkenartige Struktur, die vielfach an den Schirmrändern ansetzte und sich während der Beschallung über den Schirm bewegte, fälschte das anfänglich gut sichtbare Bild des Nahfeldes erheblich. Eine anfängliche Vermutung, daß es sich hierbei um eine fehlerhafte Wiedergabe des Bildwandlers handeln könnte, wurde durch das vom Strahlungsdruck erzeugte Reliefbild auf der freien Wasseroberfläche widerlegt, welches ebenfalls entsprechend wandernde Senken nach 1 Sekunde zeigte (Abb. 1–3).

Zur Untersuchung dieses Effektes wurde zunächst das gesamte Wasser in dem kreiszylindrischen Trog durch ein Rührwerk in Rotation um den Schallstrahl versetzt. Hierbei folgten die Senken (Stellen verminderter Intensität) der Wasserbewegung, wodurch erwiesen war, daß es sich hierbei nicht um eine vom Quarz ausgehende Interferenzerscheinung handelte, sondern daß die Störung im schallübertragenden Wasser selbst ihren Ursprung hatte. Eine Streuung des Schallstrahls an etwa durch Kavitation entstandenen Gasblasen schied wegen der guten Entgasung und relativ hohen Frequenz aus. Es blieb nun noch die Möglichkeit zu untersuchen, ob etwaige, durch Schallabsorption entstandene Bereiche unterschiedlicher Temperatur durch eine entsprechende Linsenwirkung für die Schallausblendung im Reliefbild verantwortlich zu machen wären. Zur Prüfung dieser Möglichkeit wurde die Temperatur des Wassers in verschiedenen Gebieten des Schallfeldes mit Thermoelementen gemessen. Hierbei waren die Thermoelemente so ausgebildet, daß an ihnen selbst keine Erwärmung durch Schallabsorption auftrat. Bei dieser Messung wurden Temperaturdifferenzen bis etwa 10°C analog den vorüberziehenden Schall-

ausblendungen beobachtet, was unserer letzten Annahme entsprach. Nach obigen Überlegungen mußten sich also die Störungen durch Anwendung einer Übertragungsflüssigkeit beseitigen lassen, die keinen Temperaturkoeffizienten der Schallgeschwindigkeit besitzt. Eine solche ist nach Giacomini²⁾ durch ein Wasser-Alkohol-Gemisch (100:17) zu realisieren. Das bisher benutzte Wasser wurde gegen ein derartiges Gemisch vertauscht. Jetzt blieben die oben beschriebenen Störungen auch bei längeren Beschallungszeiten aus (Abb. 4 und 5), womit uns unsere Deutung des Effektes als endgültig bestätigt erschien.

Darüberhinaus war es uns möglich, durch Anwendung eines Rührwerkes, welches für eine genügende Durchmischung der Flüssigkeit im Schallfeld sorgte, auch im bisher benutzten Wasser störungsfreie Bilder zu erzeugen (Abb. 6). Allerdings war hierbei ein Einfluß der entstehenden Wasserströmung nicht ganz zu vermeiden, wie das von der Bewegung der gesamten Wasseroberfläche beeinflusste Reliefbild zeigt und es im Leuchtschirmbild zu beobachten ist (helle Streifen in Abb. 7).

Selbstverständlich dürfte das hier angegebene Verfahren auch für alle anderen akustisch-optischen Bildwandlungsmethoden empfehlenswert erscheinen, um die durch Wärmeschlieren in der Schallübertragungsflüssigkeit entstehenden Störungen zu vermeiden.

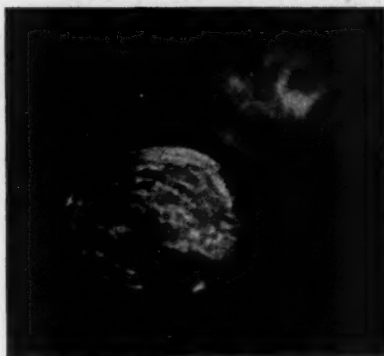


Abb. 6. Reliefbild nach 5 sec. Rührwerk läuft

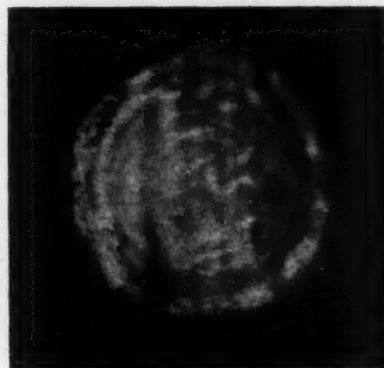


Abb. 7. Schallfeldbild des ZnS-Schirmes, analog Abb. 6

²⁾ A. Giacomini, J. acoust. Soc. Amer. 19, 701 (1947).

Jena, Technisch-Physikalisches Institut der Friedrich-Schiller-Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 7. Dezember 1952.)

Elektronenoptische Abbildung auf Grund der Wellenmechanik. I

Von Walter Glaser und Peter Schiske

(Mit 6 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Ausgehend von der Schrödinger-Gleichung des rotationssymmetrischen elektrisch-magnetischen Feldes wird die Existenz einer objektähnlichen Abbildung bewiesen. Die Wellenfunktion des paraxialen Bereiches wird dazu für jede beliebige Einstellebene durch den Verlauf der Wellenfunktion in der Objektebene ausgedrückt. Mit Hilfe dieser Lösung der paraxialen Schrödinger-Gleichung wird gezeigt, daß eine bestimmte Einstellebene existiert, in welcher bis auf eine Maßstabsänderung die gleiche Verteilung der Elektronenstromdichte wie in der Objektebene herrscht. Diese Bildlage und die Vergrößerung stimmen mit den entsprechenden Größen der geometrischen Elektronenoptik überein. Die Abbildung eines Spaltes und einer Kreislochblende wird für eine bestimmte typische Magnetlinse durchgerechnet. Allgemein zeigt sich, daß in einer beliebigen Einstellebene Fresnelsche Beugungserscheinungen entstehen, deren Beugungssäume mit Annäherung an die Bildebene unbegrenzt zusammenrücken und so den scharfen Bildrand bilden. Der wesentliche Einfluß einer Blende auf die Abbildung wird untersucht. Man kommt so von der Schrödinger-Gleichung in konsequenter Weise zur Theorie der wellenmechanischen Abbildung durchstrahlter periodischer Objekte (Gitter), welche das Analogon zur Abbe-Rayleighschen Theorie darstellt. Im Gegensatz zur Lichtoptik spielt die Abbildung von Phasenobjekten die beherrschende Rolle. Schließlich wird in einem II. Teil das Problem der Modifikation der Wellenfunktion durch das elektrisch-magnetische Abbildungsfeld auch für das nicht-paraxiale Gebiet behandelt, indem das wellenmechanische Analogon zur Kirchhoffschen Beugungsformel für den felderfüllten Raum aufgestellt wird. Auf diese Weise ergibt sich eine konsequente Theorie des wellenmechanischen Einflusses der Bildfehler auf die Abbildung.

Seitdem E. Abbe¹⁾, H. v. Helmholtz²⁾ und Lord Rayleigh³⁾ zu Ende des vorigen Jahrhunderts die Grundlagen der Wellentheorie der Abbildung im Lichtmikroskop geschaffen haben, hat diese Theorie für den Fortschritt der mikroskopischen Praxis immer größere Bedeutung erlangt. Man denke nur an das in den

¹⁾ E. Abbe, Die optischen Hilfsmittel der Mikroskopie, S. 411, Braunschweig 1878 = Ges. Abh. I. S. 152, Jena 1904; ferner Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop, herausgegeben und bearbeitet von O. Lummer u. F. Reiche, Braunschweig 1910.

²⁾ H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. Jubelband (1874).

³⁾ Lord Rayleigh, Philos. Mag. 42, 167 (1896).

letzten Jahrzehnten von F. Zernike⁴⁾ vorgeschlagene Phasenkontrastverfahren, das eine unmittelbare Folgerung aus der Abbeschen Theorie darstellt.

Da die genaue Beschreibung der Elektronenbewegung in elektrisch-magnetischen Feldern durch die Schrödingersche Wellengleichung gegeben ist, erhebt sich die Forderung, auch die elektronenoptische Abbildung und insbesondere die Theorie des Elektronenmikroskops in konsequenter Weise aus der Schrödingerschen Wellengleichung zu begründen. Diese Behandlung ist notwendig, wenn man die im Elektronenmikroskop zuerst von H. Boersch, J. Hillier und E. Ruska experimentell⁵⁾ festgestellten Beugungserscheinungen verstehen und die theoretische Auflösungsgrenze bestimmen will.

Seit einigen Jahren haben wir uns daher mit diesen Fragen⁶⁾ befaßt und insbesondere in letzter Zeit versucht, eine konsequente wellenmechanische Theorie der elektronenoptischen Abbildung zu entwickeln und gewissermaßen das Analogon zur Abbe-Rayleighschen Theorie in der Elektronenoptik aufzustellen⁷⁾.

1. Problemstellung

Bei den meisten elektronenoptischen Geräten wird durch die auftreffenden Elektronen entweder auf einem Fluoreszenzschirm oder auf einer Photoplatte ein Bild erzeugt. Die Schwärzung der Photoplatte an einer bestimmten Stelle wird bedingt durch die dort pro Flächeneinheit während der Expositionszeit auftreffende Elektronenzahl⁸⁾. Um das entstehende Bild zu bestimmen, müssen wir die Verteilung der Elektronenstromdichte in der betreffenden Einstellebene ermitteln. Diese Verteilung der Stromdichte ist einerseits durch die Objektbestrahlung und die Eigenschaften des Objekts, andererseits durch die Eigenschaften des abbildenden elektrisch-magnetischen Feldes bestimmt. Durch das vom Kondensor kommende Elektronenbündel wird das Objekt, das in der Regel eine dünne Folie darstellt, durchstrahlt. Die Elektronen erfahren dabei eine Streuung an den Atomen der Objektfolie.

Diese Wechselwirkung der Elektronen mit den atomaren Feldern rechnen wir nicht zur Elektronenoptik im engeren Sinne. Ihre Berechnung ist die Aufgabe der Streutheorie. Die eigentliche Grundaufgabe der Elektronenoptik ist es hingegen, die Einwirkung des makroskopischen, abbildenden Feldes auf die bereits durch das Objekt modifizierte Elektronenstrahlung zu untersuchen. Abb. 1⁹⁾ gibt eine schematische Darstellung des Sachverhalts.

Wir stehen also vor folgendem Problem: In einer Ebene $z = z_0$ unmittelbar hinter dem Objekt existiert eine bestimmte Verteilung der z -Komponente der Elektronenstromdichte $J_z(z_0, x_0, y_0)$. Die Elektronen treten in ein rotations-symmetrisches elektrisch-magnetisches Feld ein. Unsere Aufgabe besteht nun

⁴⁾ F. Zernike, *Physica* **9**, 686, 974 (1942) = *Achievements in Optics*, herausgegeben von A. Bouwers, Amsterdam 1946, S. 116.

⁵⁾ H. Boersch, *Naturwiss.* **28**, 709, 711 (1940); H. Boersch, *Physik. Z.* **44**, 202 (1943); J. Hillier, *Physic. Rev.* **58**, 842 (1940); E. Ruska, *Kolloid-Z.* **105**, 43 (1943).

⁶⁾ W. Glaser, *Z. Physik* **121**, 647 (1943), *Wiener Ber.* **159**, 297 (1950).

⁷⁾ W. Glaser, Vortrag bei der Semicent. Celebr. des Bureau of Standards, Washington, Nov. 1951; Vortrag am Deutschen Physikertag, Berlin 1952; eine ausführliche zusammenfassende Darstellung in „Grundlagen der Elektronenoptik“ (Buch), Wien 1952.

⁸⁾ Über den Zusammenhang von Elektronenstromdichte und Plattenschwärzung, vgl. insbesondere B. v. Borries, *Physik. Z.* **43**, 190 (1942) und „Die Übermikroskopie“, Berlin 1949, S. 186ff.

⁹⁾ Die Abbildungen wurden freundlicherweise von Herrn H. Grumm gezeichnet.

darin, die in einer beliebigen Einstellebene $z = \text{konst.}$ vorhandene Verteilung der Elektronenstromdichte zu bestimmen.

Vom Standpunkt der Wellenmechanik ist die Elektronenstrahlung in der Objektebene $z = z_0$ durch $J_z(z_0, x_0, y_0)$ allein nicht vollständig gekennzeichnet. Wir müssen vielmehr dort die Wellenfunktion $\psi(z_0, x_0, y_0)$ kennen. Diese wird uns in der Tat (wenigstens im Prinzip) durch die hier zuständige Theorie der Streuung

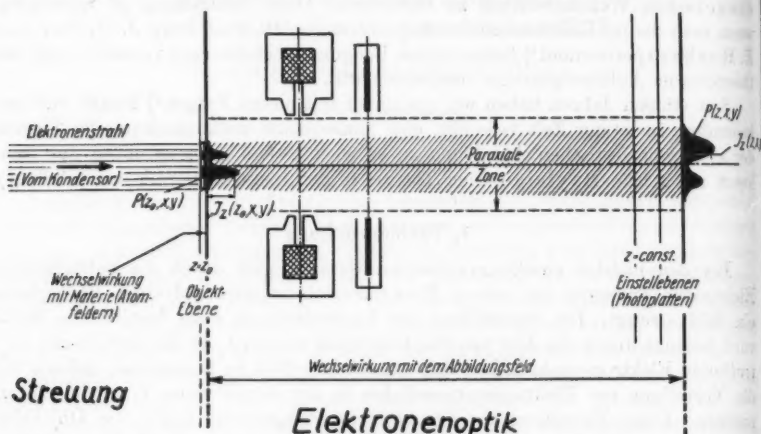


Abb. 1. Grundaufgabe der Elektronenoptik. Die Veränderung, welche die im Objekt modifizierte Wellenfunktion durch die Elektronenlinse erfährt, ist zu bestimmen

geliefert. Wir haben also aus der vorgegebenen Wellenfunktion $\psi(z_0, x_0, y_0)$ und dem bekannten Feldverlauf die Wellenfunktion $\psi(z, x, y)$ in den verschiedenen Einstellebenen zu ermitteln. Auf Grund der bekannten Formel

$$J_z(z, x, y) = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \quad (1)$$

können wir dann aus $\psi(z, x, y)$ die uns interessierende Verteilung der Stromdichte $J_z(z, x, y)$ berechnen.

Die Wellenfunktion $\psi(z_0, x_0, y_0)$ in der Objektebene, bzw. in einer Ebene unmittelbar hinter dem Objekt, kann man auf eine Form bringen, welche den Einfluß des Objekts auf das bestrahlende Elektronenbündel direkt zum Ausdruck bringt. Es sei $\psi_0(z_0, x_0, y_0)$ die Wellenfunktion, welche das beleuchtende Bündel kennzeichnet, also wie sie in der Objektebene vorhanden wäre, wenn sich kein Objekt im Strahlengang befände, während das Objektivfeld eingeschaltet ist. Da sich nämlich das Objekt im allgemeinen bereits im Linsenfeld befindet, wird dieses auf das bestrahlende Bündel gleichfalls einen Einfluß ausüben und damit auch auf $\psi_0(z_0, x_0, y_0)$. Vom geometrisch-optischen Standpunkt ist die Einwirkung des Objektivfeldes insbesondere auf die Apertur der Objektbestrahlung vielfach untersucht worden¹⁰⁾.

¹⁰⁾ B. v. Borries u. E. Ruska, Z. techn. Physik **20**, 225 (1936); L. Marton u. R. G. E. Hutter, Physic. Rev. **65**, 161 (1944); W. Glaser u. H. Robl, Österr. Ing.-Archiv, V, 37 (1951).

Beim Durchgang durch die Objektfolie werden nun an den einzelnen Stellen (x_0, y_0) des Objekts sowohl die Amplitude als auch die Phase eine Änderung erfahren. Den Faktor, um den sich die Amplitude der einfallenden Welle ändert, bezeichnen wir mit $D(x_0, y_0)$ und nennen ihn die „Durchlässigkeit“ des Objekts. Die Phasenänderung, welche durch das Objekt an der Stelle (x_0, y_0) bewirkt wird, sei durch $\sigma(x_0, y_0)$ gegeben. Wir erhalten damit die Wellenfunktion $\psi(z_0, x_0, y_0)$ unmittelbar hinter dem Objekt, wenn wir die gegebene einfallende Welle mit

$$f = D(x_0, y_0) e^{i\sigma(x_0, y_0)/\hbar} \quad (2)$$

multiplizieren. Die komplexe Funktion f kennzeichnet den Einfluß des Objekts auf die beleuchtende Strahlung. Im allgemeinen können wir unter f den Quotienten der unmittelbar hinter dem Objekt herrschenden Wellenfunktion $\psi(z_0, x_0, y_0)$ zur einfallenden (beleuchtenden) Wellenfunktion $\psi_0(z_0 - \delta, x_0, y_0)$ verstehen. Dabei bedeutet δ eine Strecke von der Größenordnung der Objektdicke. f wird daher im allgemeinen außer von der Objektstruktur auch von der „Beleuchtung“ abhängen. Wenn wir das Objekt mit einem homogenen Elektronenstrom, d. h. einer ebenen Welle beleuchten, können wir in der Objektebene die Wellenfunktion gleich f setzen und die Amplitude dieser komplexen Zahl bestimmt die Änderung der Elektronenzahl beim Durchtritt durch das Objekt, d. h. die Elektronenabsorption, während σ die Geschwindigkeitsänderung der Elektronen bestimmt.

Schreibt man für die beleuchtende Welle $\psi_0(z_0, x_0, y_0)$ allgemein

$$\psi_0 = a_0 e^{i \frac{S_0}{\hbar}}, \quad (3)$$

so erhält man für die Wellenfunktion hinter dem Objekt

$$\psi(z_0, x_0, y_0) = f \cdot \psi_0 = D \cdot a_0 e^{i(S_0 + \sigma)/\hbar}. \quad (4)$$

Wenn $\sigma = 0$ ist, d. h. f eine reelle Zahl D bedeutet, haben wir ein reines „Amplitudenobjekt“ (oder ein Absorptionsobjekt) vor uns, das allein die Elektronendichte, nicht aber die Phase der Elektronenwellen verändert. Es modifiziert die einfallende Welle durch Absorption. Ist dagegen die Durchlässigkeit $D = 1$, d. h. ist das Objekt für Elektronen vollkommen durchlässig, so wird allein die Phase der Elektronenwelle geändert. Die Elektronen verlassen die Objektfolie mit veränderter Geschwindigkeit (Streuung). Wir haben dann ein reines Phasenobjekt vor uns. Da die Absorption der Elektronen in der Objektfolie sehr gering ist, wird gerade der zweite Fall für die Elektronenmikroskopie besonders wichtig sein.

2. Paraxiale Schrödingergleichung

Wir wollen nun im folgenden den Einfluß des elektrisch-magnetischen Linsenfeldes auf die Wellenfunktion $\psi(z_0, x_0, y_0)$ mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + \frac{e\hbar}{im} (\mathfrak{A} \cdot \text{grad } \Psi) + \left(-e\varphi + \frac{e^2}{2m} A^2 \right) \Psi = E \Psi \quad (5)$$

untersuchen. Dazu haben wir zunächst in diese Gleichung für das skalare Potential φ und das Vektorpotential \mathfrak{A} die Entwicklungen des rotationsymmetrischen Feldes

$$\varphi = \Phi(z) - \frac{r^2}{4} \Phi''(z) + \frac{r^4}{64} \Phi^{(4)}(z) - \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{r}{2} \right)^{2\nu} \Phi^{(2\nu)}(z) \quad (6)$$

und

$$A = \frac{r}{2} B_z(z) - \frac{r^3}{16} B_z''(z) + \dots = \frac{r}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu! (\nu+1)!} B_z^{(2\nu)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2\nu} \quad (7)$$

einzusetzen. $\Phi(z)$ bedeutet dabei das elektrische Potential $\varphi(z, 0) = \Phi(z)$ längs der Achse. A ist die für das rotationssymmetrische Feld allein wesentliche Zirkulationskomponente des Vektorpotentials und $B_z(z) = B_z(z, 0)$ bedeutet die z -Komponente der magnetischen Feldstärke längs der Achse.

Wir wollen nun mit Hilfe von (5) die Elektronenbewegung in unmittelbarer Umgebung der Achse untersuchen. In diesem Paraxialbereich ist φ in Gl. (6) mit genügender Genauigkeit durch die beiden ersten Glieder der Reihenentwicklung dargestellt, während für das Magnetfeld das erste Glied des Vektorpotentials A in Gl. (7) ausreicht.

Bei der üblichen Normierung des Potentials φ , nach welcher die klassische Elektronengeschwindigkeit v durch

$$\frac{m}{2} v^2 = e \varphi \quad (8)$$

definiert ist, haben wir in (5) $E = 0$ zu setzen. Die Funktion

$$p(z) = \sqrt{2 m e \Phi(z)} \quad (9)$$

bedeutet dann den klassischen Impuls des Elektrons im paraxialen Bereich.

Nun gilt

$$p_z = \sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2} = p - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2p} + \dots \quad (10)$$

Im paraxialen Bereich ist p_x und p_y gegenüber p klein von erster Ordnung. Hieraus erkennt man, daß in

$$p_z = p + \pi_z \quad (11)$$

der Impuls π_z dieselbe Größenordnung wie p_x^2 und p_y^2 hat. Glieder zweiter und höherer Größenordnung von π_z brauchen daher gegenüber p_x^2 und p_y^2 im paraxialen Bereich nicht in Betracht gezogen werden. Wir gehen nun zu einer neuen Wellenfunktion χ über durch

$$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar} \int p(z) dz} \chi. \quad (12)$$

Wir erhalten daraus

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = e^{\frac{i}{\hbar} \int p(z) dz} \left(p + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \right) \chi. \quad (13)$$

Durch Vergleich mit (11) erkennt man, daß der Impulsoperator $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$ angewandt auf χ die gleiche Größenordnung hat wie $-\hbar^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$ bzw. $-\hbar^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$. Das Quadrat dieses Operators ist daher gegenüber diesen Größen zu vernachlässigen. Nochmalige Anwendung von $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$ auf (13) ergibt daher

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \left(-p^2 \chi + \frac{\hbar}{i} p' \chi + \frac{2 \hbar p}{i} \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int p dz}. \quad (14)$$

Da wir später zu anderen Koordinaten übergehen wollen, bezeichnen wir die zur z-Achse senkrechten Koordinaten mit X und Y . Wir haben so im paraxialen Bereich nach (6) und (7) für die Potentiale die Ausdrücke

$$\varphi = \Phi - \frac{r^2}{4} \Phi'', \quad A_X = -A \frac{Y}{r} = -\frac{1}{2} B_z Y, \quad A_Y = A \frac{X}{r} = \frac{1}{2} B_z X. \quad (15)$$

Durch Einsetzen von (15) und (14) in (5) erhält man für die Schrödinger-Gleichung des paraxialen Bereichs

$$\begin{aligned} & -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial Y^2} \right) + \frac{\hbar e}{i} B_z \left(X \frac{\partial \chi}{\partial Y} - Y \frac{\partial \chi}{\partial X} \right) + \frac{\hbar}{i} p' \chi \\ & + \frac{e}{2} \left(m \Phi'' + \frac{e}{2} B_z \right)^2 \chi r^2 + 2 p \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Wir gehen nun vom Koordinatensystem X, Y, z zu dem „verschraubten System“ x, y, z durch die Drehungen

$$\begin{aligned} X &= x \cos \Theta - y \sin \Theta \\ Y &= x \sin \Theta + y \cos \Theta \end{aligned} \quad (17)$$

über, wobei der von der z -Koordinate abhängende Verschraubungswinkel durch

$$\Theta(z) = \int_{z_0}^z \frac{e B_z}{2 p} dz \quad (18)$$

gegeben ist. Wenn man die Wellenfunktion χ im neuen System mit ψ bezeichnet

$$\chi(X, Y, z) = \psi(x, y, z), \quad (19)$$

folgt zunächst

$$2 p \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_{X, Y} = 2 p \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{x, y} - e B_z \left(Y \frac{\partial \chi}{\partial X} - X \frac{\partial \chi}{\partial Y} \right). \quad (20)$$

Da ferner

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad (21)$$

erhält man so endgültig für die paraxiale Schrödinger-Gleichung

$$-\hbar^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{e}{2} \left(m \Phi'' + \frac{e}{2} B_z \right) (x^2 + y^2) \psi + \frac{\hbar}{i} p' \psi + 2 p \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (22)$$

Für die Stromdichte

$$J_z = \frac{\hbar}{2 i m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \right) \quad (23)$$

erhält man nach (12) im Rahmen unserer Näherung

$$J_z = \frac{p(z)}{m} \psi \psi^*. \quad (24)$$

Daß (24) die zur Gl. (22) gehörige Stromdichte ist, kann man auch folgendermaßen sehen: Multipliziert man (22) mit der zu ψ konjugierten komplexen Funktion ψ^* und ebenso die zu (22) konjugierte Gleichung mit ψ und subtrahiert schließlich beide Gleichungen voneinander, so erhält man

$$\frac{i \hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + \frac{i \hbar}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (p \psi \psi^*) = 0. \quad (25)$$

Kann man voraussetzen, daß außerhalb eines gewissen Gebietes in einer achsensenkrechten Ebene ψ verschwindet, und integriert man (25) über dieses Gebiet, so ergibt die Integration über die ersten beiden Ausdrücke den Wert 0, da die Glieder an den Integrationsgrenzen wegfallen und man erhält

$$\frac{\partial}{\partial z} \int p \psi \psi^* dx dy = 0. \quad (26)$$

Für zwei beliebige achsensenkrechte Ebenen $z = z_0$ und $z = z_1$ gilt also nach (24)

$$\int J_z(z_0, x, y) dx dy = \int J_z(z_1, x, y) dx dy, \quad (27)$$

d. h. die Zahl der Elektronen, welche durch die einzelnen achsensenkrechten Ebenen gehen, ist konstant. Formel (24) ist also die dem Erhaltungssatz entsprechende Definition der Stromdichte.

Die paraxiale Schrödinger-Gleichung kann auf Grund der bekannten Entsprechungen zwischen Operatoren und klassischen Impulsen erraten werden. Die Differentialgleichungen der paraxialen Bahn

$$\frac{d}{dz} \left(p \frac{dx}{dz} \right) + \left(\frac{e m \Phi''}{2 p} + \frac{e^2 B_z^2}{4 p} \right) x = 0; \quad \frac{d}{dz} \left(y \frac{dy}{dz} \right) + \left(\frac{e m \Phi''}{2 p} + \frac{e^2 B_z^2}{4 p} \right) y = 0. \quad (28)$$

folgen aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int L dz = \delta \int \left[\frac{1}{2} p (x'^2 + y'^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{e m \Phi''}{2 p} + \frac{e^2 B_z^2}{4 p} \right) (x^2 + y^2) \right] dz = 0. \quad (29)$$

Hierzu lassen sich die Impulse

$$p_x = x' \cdot p, \quad p_y = y' \cdot p \quad (30)$$

und die Hamiltonsche Funktion

$$H = \frac{1}{2 p} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2 p} \left(\frac{e m \Phi''}{2} + \frac{e^2 B_z^2}{4} \right) (x^2 + y^2) \quad (31)$$

bilden. Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung lautet dann

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{e m \Phi''}{2} + \frac{e^2 B_z^2}{4} \right) (x^2 + y^2) + 2 p \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (32)$$

Mit Hilfe der Korrespondenzen

$$\frac{\partial W}{\partial x} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{\partial W}{\partial y} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}; \quad \frac{\partial W}{\partial z} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \quad (33)$$

kann man nun zur paraxialen Schrödinger-Gleichung übergehen; dabei ist allerdings die Reihenfolge der Faktoren im Produkt

$$2 p \frac{\partial W}{\partial z}$$

nicht eindeutig festgelegt. Es zeigt sich, daß man zu der symmetrisierten Gestalt

$$p \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z} p \quad (34)$$

überzugehen hat. Die daraus entstehende Operator-Gleichung

$$\left\{ -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{e}{2} \left(m \Phi'' + \frac{e}{2} B_z^2 \right) (x^2 + y^2) + p \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\hbar}{i} p \frac{\partial}{\partial z} \right\} \psi = 0 \quad (35)$$

ist dann gleichbedeutend mit (22).

Für die Anwendbarkeit der paraxialen Schrödinger-Gleichung ist es selbstverständlich notwendig, daß sie wirklich Lösungen besitzt, die nur in Achsennähe nennenswert von Null verschieden sind. Solche Lösungen können nun tatsächlich leicht angegeben werden; infolge der auf der Hand liegenden Gleichartigkeit von Gl. (22) mit der einen harmonischen Oszillator darstellenden zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung kann die bekannte Kennardsche Konstruktion¹¹⁾ bewegter Wellenpakete sinngemäß übernommen werden. Man erhält dadurch für $|\psi|$ und nach (24) auch für J_z einen Abfall gemäß der Gaußschen Fehlerkurve.

3. Integration der paraxialen Schrödingergleichung

Wir wollen nun die paraxiale Schrödinger-Gleichung (22) allgemein lösen. Um zunächst eine spezielle Lösung zu erhalten, machen wir den Ansatz

$$\psi = a(z) e^{\frac{i}{\hbar} S(x, y, z)} \quad (36)$$

Gehen wir mit (36) in die Gl. (22), so erhalten wir als Real- und Imaginärteil die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \frac{e}{2} \left(m \Phi'' + \frac{e}{2} B_z^2\right) r^2 + 2p \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (37)$$

und

$$2p a' + p' a + a \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right) = 0. \quad (38)$$

Die Gl. (37) ist eine partielle Differentialgleichung für S allein. Haben wir daraus S bestimmt, so ergibt sich das zugehörige a aus Gl. (38). Um uns ein Integral von (37) zu verschaffen, setzen wir S als Potenzreihe an:

$$S = \gamma(z) + \alpha(z) \cdot x + \beta(z) \cdot y + A(z) \cdot x^2 + B(z) \cdot y^2 + \Gamma(z) \cdot x y, \quad (39)$$

wobei wir uns im paraxialen Bereich auf Glieder bis zur zweiten Ordnung einschließlich zu beschränken haben. Indem wir (39) in (37) einsetzen und die Koeffizienten der Potenzen von x und y einzeln Null setzen, erhalten wir für die Funktionen $\gamma, \alpha, \beta, A, B$ und Γ die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$4A^2 + \frac{e}{2} \left(m \Phi'' + \frac{e}{2} B_z^2\right) + 2p A' + \Gamma^2 = 0 \quad (40)$$

$$4B^2 + \frac{e}{2} \left(m \Phi'' + \frac{e}{2} B_z^2\right) + 2p B' + \Gamma^2 = 0$$

und

$$2A\alpha + p\alpha' + \beta\Gamma = 0; \quad 2B\beta + p\beta' + \alpha\Gamma = 0 \quad (41)$$

sowie

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2p\gamma' = 0, \quad 4\Gamma \cdot (A + B) + 2p\Gamma' = 0. \quad (42)$$

Die letzte Gleichung befriedigen wir durch

$$\Gamma = 0. \quad (43)$$

A und B genügen dann ein und derselben Riccatischen Differentialgleichung. Wir setzen

$$A = B = \frac{p}{2} \frac{q'}{q} \quad (44)$$

¹¹⁾ E. H. Kennard, Z. Physik 44, 343 (1927).

und erhalten aus (40)

$$\sqrt{\Phi} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{\Phi} \frac{d\varrho}{dz} \right) + \frac{1}{4} \left(\Phi'' + \frac{e}{2m} B_z^2 \right) \varrho = 0. \quad (45)$$

Wenn ϱ eine Lösung von (45) ist, ergibt sich aus

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{2A}{p} = -\frac{\varrho'}{\varrho}; \quad \frac{\beta'}{\beta} = -\frac{2A}{p} = -\frac{\varrho'}{\varrho} \quad (46)$$

mit den beiden Integrationskonstanten ap_0 und bp_0 [a ist hier nicht zu verwechseln mit a in (36)]

$$\alpha = -\frac{a p_0}{\varrho}, \quad \beta = -\frac{b p_0}{\varrho}. \quad (47)$$

Aus (42) erhält man mit (47):

$$\gamma' = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2p} = -\frac{a^2 + b^2}{2p} \frac{p_0^2}{\varrho^2}. \quad (48)$$

Nun folgt aus (45) für zwei partikuläre Integrale ϱ und σ

$$p(\sigma \varrho' - \sigma' \varrho) = \text{konst.} = \frac{p_0}{\kappa}, \quad (49)$$

wobei wir die Konstante mit p_0/κ bezeichnet haben. Durch Division mit ϱ^2 ergibt sich aus (49)

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\sigma}{\varrho} \right) = \frac{\sigma' \varrho - \sigma \varrho'}{\varrho^2} = -\frac{p_0}{p} \frac{1}{\varrho^2}. \quad (50)$$

Damit wird nach (48)

$$\gamma = \frac{p_0 \kappa}{2} (a^2 + b^2) \frac{\sigma}{\varrho} + \text{konst.} \quad (51)$$

Bis auf eine willkürliche Konstante lautet daher S :

$$S = \frac{p_0}{2\varrho} \left[\kappa (a^2 + b^2) \sigma - 2(a\kappa x + b\kappa y) + \frac{p}{p_0} \varrho' (x^2 + y^2) \right]. \quad (52)$$

Die Gl. (38) erhält mit (52) die Gestalt

$$\frac{da}{a} = -\frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{dp}{2p}. \quad (53)$$

Durch Integration folgt daraus

$$a = \frac{\text{konst.}}{\varrho \sqrt{p}}. \quad (54)$$

Eine (partikuläre) Lösung der paraxialen Schrödinger-Gleichung lautet also

$$\psi = \frac{1}{\varrho \sqrt{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{p_0}{2\varrho} \left[\kappa (a^2 + b^2) \sigma - 2(a\kappa x + b\kappa y) + \frac{p}{p_0} \varrho' (x^2 + y^2) \right]}. \quad (55)$$

Wir wollen nun für $\sigma(z)$ und $\varrho(z)$ speziell jene Lösungen $s(z)$ und $t(z)$ von (45) wählen, welche den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} s(z_0) &= 1; & t(z_0) &= 0 \\ s'(z_0) &= 0; & t'(z_0) &= 1 \end{aligned} \quad (56)$$

genügen. Die Konstante κ erhält dann nach (49) den Wert 1 und es wird

$$\psi = \frac{1}{t\sqrt{p}} e^{\frac{i}{2\hbar t} [p_0 s (a^2 + b^2) - 2 p_0 (a x + b y) + p t' (x^2 + y^2)]} \quad (57)$$

Die Lösung (57) enthält die willkürlichen Parameter a und b . Mit Hilfe einer willkürlichen Funktion $A(a, b)$ [nicht zu verwechseln mit dem Koeffizienten A in (39)], können wir daher eine viel allgemeinere Lösung der paraxialen Schrödinger-Gleichung (27) finden, indem wir (57) mit $A(a, b)$ multiplizieren und über a und b von $-\infty$ bis $+\infty$ integrieren:

$$\psi(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(a, b)}{t\sqrt{p}} e^{\frac{i}{2\hbar t} [p_0 s (a^2 + b^2) - 2 p_0 (a x + b y) + p t' (x^2 + y^2)]} da db. \quad (58)$$

Wir wollen nun zeigen, daß wir die Funktion $A(a, b)$ durch die Wellenfunktion $\psi(z_0, x_0, y_0)$ in einer willkürlichen Ebene (Objektebene) ausdrücken können. Wir formen dazu (58) auf folgende Weise um. Mit

$$p(s t' - s' t) = p_0 \quad \text{oder} \quad p t' = \frac{p_0}{s} + \frac{s'}{s} p t \quad (59)$$

erhält man für (51) ($\kappa = 1$)

$$S = \frac{1}{2t} \left[p_0 s (x^2 + y^2) - 2 p_0 (x x_0 + y y_0) + \frac{p_0}{s} (x^2 + y^2) \right] + \frac{p s'}{2s} (x^2 + y^2) \quad (60)$$

$$= \frac{p_0}{2s t} [(x - a s)^2 + (y - b s)^2] + \frac{p s'}{2s} (x^2 + y^2). \quad (61)$$

In (58) eingesetzt, ergibt dies

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{t\sqrt{p}} e^{\frac{i p s'}{2\hbar s} (x^2 + y^2)} \iint A(a, b) e^{\frac{i p_0}{2\hbar s t} [(x - a s)^2 + (y - b s)^2]} da db. \quad (62)$$

Läßt man nun z gegen z_0 , d. h. $t(z)$ gegen Null gehen, so wird die e -Potenz im Integral eine sehr rasch oszillierende Funktion, solange $x \neq a s$ und $y \neq b s$ ist. Wegen des wechselnden Vorzeichens tragen also nur die Werte von a und b in unmittelbarer Nähe von x/s und y/s zum Integral bei. Wir können daher für $z \rightarrow z_0$ in der Funktion $A(a, b)$ $a = x/s$ und $b = y/s$ setzen und vor das Integral nehmen. Wir erhalten so für z in unmittelbarer Nähe von z_0

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \frac{1}{t\sqrt{p}} e^{\frac{i p s'}{2\hbar s} (x^2 + y^2)} A\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i p_0}{2\hbar s t} [(x - a s)^2 + (y - b s)^2]} da db \\ &= \frac{1}{t\sqrt{p}} e^{\frac{i p s'}{2\hbar s} (x^2 + y^2)} A\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i p_0}{2\hbar s t} (x - a s)^2} da \right) \\ &\quad \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i p_0}{2\hbar s t} (y - b s)^2} db \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Wir setzen

$$\frac{p_0}{2 \hbar i s} (x - a s)^2 = \frac{\pi}{2} u^2; \quad \frac{p_0}{2 \hbar s t} (y - b s)^2 = \frac{\pi}{2} v^2 \quad (64)$$

und erhalten:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \psi(x, y, z) = \frac{\pi \hbar}{s p_0 \sqrt{p}} A\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) e^{\frac{i p s'}{2 \hbar s} (x^2 + y^2)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{\pi}{2} u^2} du \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv \right). \quad (65)$$

Jedes der beiden letzten Integrale (Fresnelsche Integrale) hat den Wert $1 + i$, so daß ihr Produkt durch $(1 + i)^2 = 2i$ gegeben ist. Führen wir nun den Grenzübergang $z \rightarrow z_0$ aus, so wird wegen $s(z_0) = 1$ und $s'(z_0) = 0$

$$A(x, y) = \frac{p_0^{1/2}}{2 i \pi \hbar} \psi(z_0, x, y)$$

oder

$$A(a, b) = \frac{p_0^{1/2}}{2 i \pi \hbar} \psi(z_0, a, b). \quad (66)$$

Wenn wir statt a und b lieber x_0 und y_0 schreiben, erhalten wir somit

$$\psi(z, x, y) = \frac{p_0^{1/2}}{2 \pi i \hbar t \sqrt{p}} \iint \psi(z_0, x_0, y_0) e^{\frac{i}{2 \hbar t} [p_0 s (x_0^2 + y_0^2) - 2 p_0 (x_0 x + y_0 y) + p t' (x^2 + y^2)]} dx_0 dy_0. \quad (67)$$

Diese Formel gestattet die Berechnung der Wellenfunktion $\psi(z, x, y)$ in jeder beliebigen Einstellebene $z = \text{konst.}$, wenn ihr Verlauf $\psi(z_0, x_0, y_0)$ in der Objektebene gegeben ist. Voraussetzung ist dabei zunächst, daß in der Einstellebene $t(z)$ nicht verschwindet.

Da der Exponent der e -Funktion eine quadratische Funktion in den Integrationsvariablen x_0 und y_0 ist, haben wir es im allgemeinen in jeder Einstellebene mit einer Fresnelschen Beugungserscheinung zu tun. Nur in der Ebene $z = z_F$, wo $s(z)$ Null ist

$$s(z_F) = 0, \quad (68)$$

verschwindet das quadratische Glied und wir haben es mit einer Fraunhoferschen Beugung zu tun. Wir wollen die Ebene $z = z_F$ die Fraunhofersche Ebene nennen. Sie ist im allgemeinen — d. h. wenn das Objekt im Feldbereich liegt — verschieden von der Brennebene. Nur wenn die Objektebene außerhalb des Feldbereiches angenommen wird, stimmt die Fraunhofersche Ebene mit der Brennebene überein. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude in der Fraunhoferschen Ebene ist nach (67) wegen (68) durch

$$\psi(z_F, x, y) = \frac{p_0^{1/2}}{2 \pi i \hbar t \sqrt{p}} e^{\frac{i p t'}{2 \hbar t} (x^2 + y^2)} \iint \psi(z_0, x_0, y_0) e^{-\frac{i p_0}{\hbar t} (x x_0 + y y_0)} dx_0 dy_0 \quad (69)$$

gegeben. Spezielle Auswertungen von (67) und (69) werden wir weiter unten durchführen.

Im feldfreien Raum gehen nach (56) die Lösungen $s(z)$ und $t(z)$ in 1 bzw. in 0 über, (67) wird damit

$$\psi(z, x, y) = \frac{p_0}{2 \pi i \hbar z} \iint \psi_0(z_0, x_0, y_0) e^{\frac{i x_0}{2 \hbar z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]} dx_0 dy_0. \quad (70)$$

Entsprechend (61) und (62) können wir nun die Wellenfunktion bei Wirksamkeit des Feldes

$$\psi(z, x, y) = \frac{p_0^{3/4}}{2 \pi i \hbar t \sqrt{p}} e^{\frac{i p s'}{2 \hbar s} (x^2 + y^2)} \iint \psi(z_0, x_0, y_0) e^{\frac{i p_0}{2 \hbar s t} [(x - s x_0)^2 + (y - s y_0)^2]} dx_0 dy_0 \quad (71)$$

schreiben. Setzen wir darin

$$x/s = \bar{x}; \quad t/s = \bar{z} \quad (72)$$

so entsteht

$$\psi(z, x, y) = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{p_0}{p}} e^{\frac{i p s'}{2 \hbar s} (x^2 + y^2)} \cdot \frac{p_0}{2 \pi i \hbar \bar{z}} \iint \psi_0(z_0, x_0, y_0) e^{\frac{i p_0}{2 \hbar \bar{z}} [(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2]} d\bar{x}_0 d\bar{y}_0. \quad (73)$$

Bis auf einen hinzutretenden Faktor kann also die Wellenfunktion des felderfüllten Raumes mit Hilfe der Transformation (72) durch die Wellenfunktion des feldfreien Raumes ersetzt werden.

4. Wellenmechanischer Nachweis einer objekttrauen Abbildung

Mit Hilfe der im vorhergehenden Abschnitt abgeleiteten Lösung der paraxialen Schrödinger-Gleichung wollen wir zeigen, daß es eine ganz bestimmte Einstellenebene gibt ($z = z_1$), in welcher die gleiche Stromdichteverteilung wie in der Objektebene herrscht, wenn wir die Koordinaten des Bildes in einem anderen Maßstab als die des Objektes messen.

Man erkennt, daß die Lösung der paraxialen Schrödinger-Gleichung (69) für die Einstellenebene $z = z_0$ versagt, in der die Funktion $t(z)$ eine weitere, auf z_0 folgende Nullstelle hat. Um hier die Wellenfunktion zu untersuchen, schreiben wir die Lösung in der Gestalt (71)

$$\psi(z, x, y) = \frac{p_0^{3/4}}{2 \pi i \hbar t \sqrt{p}} e^{\frac{i p s'}{2 \hbar s} (x^2 + y^2)} \iint \psi(z_0, x_0, y_0) e^{\frac{i p_0}{2 \hbar s t} [(x - s x_0)^2 + (y - s y_0)^2]} dx_0 dy_0. \quad (74)$$

Lassen wir nun $z \rightarrow z_1$, also $t(z)$ nach Null gehen, so wird die e -Potenz unter dem Integral eine sehr rasch oszillierende Funktion in allen Punkten der Einstellenebene, wo $x \neq s x_0$ und $y \neq s y_0$ ist. Hier werden sich die Beiträge des Integranden gegenseitig aufheben (oder, wie man auch sagen kann, durch Interferenz gegenseitig vernichten). Zum Integral tragen also nur die Punkte x_0, y_0 merklich bei, die in unmittelbarer Nachbarschaft von $x/s, y/s$ liegen. Wir können also die (dagegen langsam veränderliche) Funktion $\psi(z_0, x/s, y/s)$ vor das Integral nehmen:

$$\psi(z, x, y) = \frac{p_0^{3/4}}{2 \pi i \hbar t \sqrt{p}} e^{\frac{i p s'}{2 \hbar s} (x^2 + y^2)} \psi\left(z_0, \frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) \iint e^{\frac{i p_0}{2 \hbar s t} [(x - s x_0)^2 + (y - s y_0)^2]} dx_0 dy_0. \quad (75)$$

Die Auswertung des Integrals wie oben und Übergang zu $z = z_1$ führt zu

$$\psi(z_1, x, y) = \frac{1}{s_1} \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} \psi\left(z_0, \frac{x}{s_1}, \frac{y}{s_1}\right) e^{\frac{i p_1 s_1'}{2 \hbar s_1} (x^2 + y^2)}. \quad (76)$$

Die Stromdichte $J_z(z_1, x, y) = p_1 \cdot \psi(z_1) \cdot \psi^*(z_1)/m$ in der Ebene $z = z_1$ steht also nach (72) zu der Stromdichte $J_z(z_0, x, y) = p_0 \psi(z_0) \psi^*(z_0)/m$ in der be-

merkenswerten Beziehung

$$J_z(z_1, x_1, y_1) = \frac{1}{s_1} J_z\left(z_0, \frac{x_1}{s_1}, \frac{y_1}{s_1}\right). \quad (77)$$

Wählt man daher in der „Bildebene“ $z = z_1$ eine s_1 -mal größere Längeneinheit als in der Objekzebene $z = z_0$ und mißt man die Elektronenstromdichte in einer s_1^2 -mal größeren Einheit, so zeigt (77), daß die Stromdichteverteilung in der Bildebene mit derjenigen in der Objekzebene vollkommen übereinstimmt. Damit ist die Existenz einer objekttreuen Abbildung auf Grund der paraxialen Schrödinger-Gleichung bewiesen. Man kann auch sagen: Unter allen Einstellebenen $z = \text{konst.}$ gibt es eine bestimmte, $z = z_1$, in welcher bis auf eine Maßstabsänderung die gleiche Stromdichteverteilung wie in der Objekzebene $z = z_0$ herrscht. Der Ort dieser Bildebene ist durch

$$t(z_1) = 0 \quad (78)$$

und die Vergrößerung V ist durch

$$V = s(z_1) \quad (79)$$

gegeben, wobei s und t die Lösungen der Differentialgleichung (45) mit den Anfangsbedingungen (56) bedeuten. Da (45) mit der Differentialgleichung der achsen-nahen Elektronenbahnen der geometrischen Elektronenoptik übereinstimmt und hier Bildort z_1 und Vergrößerung V durch (74) und (75) definiert sind, sind somit auch die entsprechenden Größen nach der Wellenmechanik damit identisch.

In der Dioptrik der Lichtstrahlen wird bekanntlich für das paraxiale Gebiet gleichfalls die Existenz einer stigmatischen Abbildung nachgewiesen. Geht man in der Lichtoptik zur Wellenauffassung über, so zeigt sich, daß diese „ideale Abbildung“ durch die Beugungserscheinungen in den optischen Instrumenten beeinträchtigt wird. Von diesem Standpunkt aus könnte es überraschend erscheinen, daß wir in der wellenmechanischen Betrachtung der Elektronenoptik eine „ideale Abbildung“ nachweisen konnten. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich durch die folgenden Überlegungen auf:

Wir haben zu beachten, daß der Nachweis der objekttreuen Abbildung die Beschränkung auf das paraxiale Gebiet zur wesentlichen Voraussetzung hat. Zur Erläuterung betrachten wir zunächst ein Objekt, das aus einer Anzahl Löcher in einem undurchsichtigen Schirm besteht. Ist die Größe der Löcher und ihr Abstand voneinander groß gegenüber der de Broglie-Wellenlänge, so folgt aus der Heisenbergschen Unschärferelation, daß die Elektronenstrahlen keine starke Ablenkung (Beugung) aus der z -Richtung erfahren und daher im paraxialen Bereich verbleiben werden. Ein derartiges Objekt wird daher nach unseren Überlegungen praktisch getreu abgebildet. Denkt man sich nun die Löcher bzw. ihre Abstände im siebartigen Objekt immer kleiner und kleiner werden, so treten immer stärkere „Beugungserscheinungen“ auf und ein immer größerer Anteil der Strahlung verläßt den paraxialen Bereich. In diesem Falle sind die Voraussetzungen unserer Rechnung nicht mehr gegeben und wir können daher keine objekttreue Abbildung erwarten. Durch Einführung einer Blende können wir die Strahlung, welche zur Bildentstehung beiträgt, auf den paraxialen Bereich beschränken. Wir haben auf diese Weise zwar die Voraussetzung der Paraxialität erfüllt, müssen dafür aber den Einfluß der Blende auf die Abbildung in Betracht ziehen. Es wird

sich sogleich zeigen, daß durch die Beugung an der Blende die Objektstreue beeinträchtigt wird.

(77) Wir sehen also: je feiner strukturiert das Objekt ist, desto schwieriger ist es, davon eine getreue Abbildung zu erzielen. Arbeitet man ohne bündelbegrenzende Blende, dann überschreitet man den paraxialen Bereich und die in Erscheinung tretenden Bildfehler verschlechtern die Abbildung. Schaltet man eine Blende ein, um die Bildfehler zu vermeiden, so hat man dafür die bildverschlechternde Beugung an der Blende in Kauf zu nehmen. Den Einfluß der Blende auf die Abbildung werden wir weiter unten behandeln. Zunächst wollen wir für zwei möglichst einfache Objekte die paraxiale Abbildung explizit untersuchen.

5. Abbildung von Rechteck- und Kreislochblende

(78) Als eine Anwendung der Beziehung (75) behandeln wir die wellentheoretische Abbildung einer rechteckigen und im Anschluß daran einer kreisförmigen Öffnung in einem undurchlässigen Schirm durch eine typische Magnetlinse.

(79) Zunächst betrachten wir den Fall einer völlig achsenparallelen Beleuchtung. Vom Standpunkt der geometrischen Optik aus existiert hier keine bestimmte Einstellebene, sondern es handelt sich um eine Art Zentralprojektion durch den Punkt F . Es liegt dies daran, daß wir in der Objektebene alle Strahlen achsenparallel annehmen, also allein die Elektronenbahnen $s(z)$ betrachten. In der Wellenmechanik ist die Sachlage völlig anders. Infolge der „Beugung“ an den Spalträndern treten nämlich auch Elektronen mit anderen Neigungen gegen die Achse ins Abbildungsfeld. Dadurch kommt es, daß wir eine wohldefinierte Bildebene erhalten, während in allen anderen Einstellebenen an den geometrisch-optischen Schattenrändern im allgemeinen Fresnelsche Beugungserscheinungen auftreten.

Abbildung eines Rechtecks

$$a_1 \leq x_0 \leq a_2 \quad \text{und} \quad b_1 \leq y_0 \leq b_2. \quad (80)$$

In der Schirmebene $z = 0$ haben wir

$$\psi(0, x_0, y_0) = e^{ikz}|_{z=0} = 1 \quad (81)$$

zu setzen. Die Formel (67) bzw. (70) ergibt

$$\psi(z, x, y) = \frac{p_0^{3/4}}{2\pi i \hbar t \sqrt{p}} \frac{e^{i p s'/s} (z^2 + y^2)}{e^{2 i p_0 s t} (x - s x_0)^2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i p_0 s t} (x - s x_0)^2}{e^{2 i \hbar s t}} dx_0 \int_{b_1}^{b_2} \frac{e^{i p_0 s t} (y - s y_0)^2}{e^{2 i \hbar s t}} dy. \quad (82)$$

Setzt man

$$\sqrt{\frac{p_0}{2 \hbar s t}} (x - s x_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} u, \quad \sqrt{\frac{p_0}{2 \hbar s t}} (y - s y_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} v \quad (83)$$

$$v_1 = \sqrt{p_0/\pi \hbar s t} (x - s a_1) \quad v_2 = \sqrt{p_0/\pi \hbar s t} (x - s a_2); \quad (84)$$

$$u_1 = \sqrt{p_0/\pi \hbar s t} (y - s b_1) \quad u_2 = \sqrt{p_0/\pi \hbar s t} (y - s b_2), \quad (85)$$

so geht (78) mit Benutzung des Fresnelschen Integrals¹²⁾

$$F(w) = \int_0^w e^{i\frac{\pi}{2}v^2} dv = C(w) + iS(w) \quad (86)$$

über in

$$\psi = \frac{1}{2is} \sqrt{\frac{p_0}{e^2 \hbar s}} \frac{s'}{s} (x^2 + y^2) [F(u_2) - F(u_1)] \cdot [F(v_2) - F(v_1)]. \quad (87)$$

Die Abbildung eines Spalts wird aus (85) erhalten, indem dort $b_1 = -\infty$ und $b_2 = +\infty$ gesetzt wird. Die Wellenfunktion wird daher durch

$$\psi = \frac{1+i}{2is} \sqrt{\frac{p_0}{e^2 \hbar s}} \frac{s'}{s} (x^2 + y^2) [F(v_2) - F(v_1)] \quad (88)$$

dargestellt. Für die Stromdichte J_z ergibt sich so:

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{p_0}{2m s^2} |F(v_2) - F(v_1)|^2 = \frac{p_0}{2m s^2} \{ [C(v_2) - C(v_1)]^2 + [S(v_2) - S(v_1)]^2 \} \\ &= \frac{p_0}{2m s^2} \overline{P_1 P_2}, \end{aligned} \quad (89)$$

wobei $\overline{P_1 P_2}$ die Entfernung der beiden Punkte P_1 und P_2 auf der Cornuschen Spirale ist. Dabei entsprechen den Punkten P_1 und P_2 nach (84) die Parameterwerte

$$v_1 = \sqrt{\frac{p_0}{\pi \hbar s t}} (x - s a_1); \quad v_2 = \sqrt{\frac{p_0}{\pi \hbar s t}} (x - s a_2). \quad (90)$$

In Abb. 2 ist die auf diese Weise berechnete Elektronenintensität in den einzelnen Einstellebenen bei der Abbildung eines langen Spalts durch eine Magnetlinse von der Form eines Glockenfeldes dargestellt. Die Daten, welche der Auswertung zugrunde gelegt wurden, sind aus der Bildunterschrift zu ersehen.

Aus (89) und (90) folgen für die Bildebene $z = z_1$, welche durch $t(z_1) = 0$ definiert ist, unmittelbar

$$I_z = 0 \quad \text{für } x > s_1 a_1 \quad \text{oder} \quad x < s_1 a_2 \quad (91)$$

und

$$I_z = I_{z0}/s_1^2 \quad \text{für } s_1 a_1 > x > s_1 a_2, \quad (92)$$

also eine vollkommen ähnliche Abbildung des Spalts mit der Vergrößerung $V = s_1$. Daß dies möglich ist, beruht natürlich, um es nochmals hervorzuheben, darauf, daß wir eine gegenüber der de Broglie-Wellenlänge so große Spaltbreite vorausgesetzt haben, daß auch noch die am Spalt abgebeugte Elektronenstrahlung im paraxialen Gebiet verbleibt. Die de Broglie-Wellenlänge von 100 kV-Elektronen beträgt $4 \cdot 10^{-9}$ mm. Der Atomradius ist ungefähr 10^{-7} mm. Da nun aber die materiellen Ränder jedes Spaltes aus Atomen aufgebaut sind, folgt, daß die Spaltweite eines derartigen abzubildenden Spalts die Größenordnung des Atoms übertreffen muß, d. h. an die tausend- bis zehntausendmal größer als die de

¹²⁾ Vgl. E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, 2. Aufl., Leipzig-Berlin 1933.

Broglie-Wellenlänge ist. Die seitliche Abbeugung der Elektronenstrahlen wird daher klein bleiben und die Voraussetzung der paraxialen Wellen-Abbildung wird daher in der Elektronenoptik im Gegensatz zu der Lichtoptik infolge der kleinen de Broglie-Wellenlänge erfüllt sein.

Soweit wurde achsenparallele Beleuchtung vorausgesetzt. Es kann jedoch ganz allgemein eingesehen werden, daß die Intensitätsverteilung bei schiefer Beleuchtung denselben Verlauf zeigt wie bei axialer Beleuchtung, wobei nur in jeder

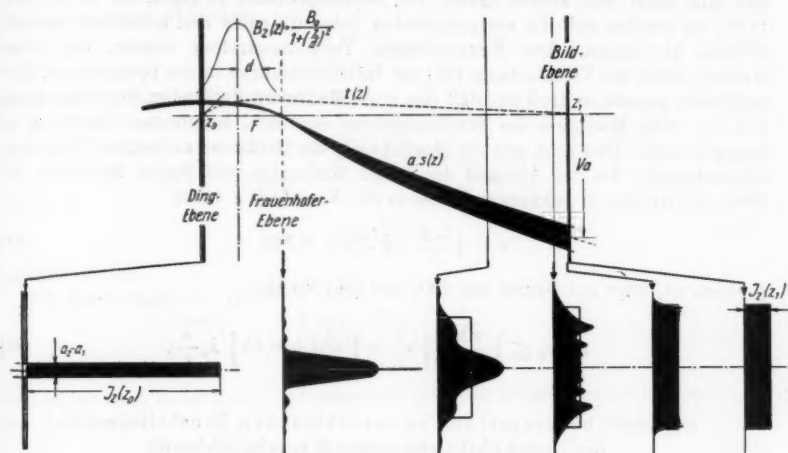


Abb. 2. Wellenmechanische Abbildung eines langen Spaltes durch ein magnetisches Glockenfeld. Die Spaltbreite beträgt $10^{-5} d$ (d Halbwertsbreite des Glockenfeldes). Der Spaltabstand von der Achse ist $10^{-8} d$, die Linienstärke beträgt $k^2 = 1$. Oben: Geometrisch-optischer Verlauf des Strahlenbündels zusammen mit den Lösungen $t(z)$, $s(z)$ in maßstabgerechter Darstellung. Unten: Nach der Wellenmechanik berechnete Stromdichten in den einzelnen Einstellebenen. Bei $z = z_F$ Fraunhofer'sche Beugungserscheinung. In den anderen Einstellebenen Fresnel'sche Beugungserscheinungen, die sich bei Annäherung an die Bildebene zu dem scharfen Bildrand zusammenziehen

Einstellebene das Intensitätsgebirge jeweils um eine bestimmte Strecke verschoben ist. Bis auf einen Phasenfaktor ist der Ausdruck für die Wellenfunktion nach (67) bei beliebiger Gestalt der abzubildenden Blendenöffnung durch

$$\psi(z, y, x) = \frac{p_0^{1/2}}{2 i \pi \hbar t \sqrt{p}} \iint_{\text{Blendenöffnung}} \psi(z_0, x_0, y_0) e^{\frac{i}{\hbar} [p_0 s(x_0^2 + y_0^2) - 2 p_0 (x_0 + y_0 y)]} dx_0 dy_0 \quad (93)$$

gegeben. $\psi(z_0)$ wird bei schiefer Beleuchtung

$$\psi(z_0, x_0, y_0) = e^{\frac{i p_0}{\hbar} \sin \gamma x_0} \quad (94)$$

Unter nochmaliger Unterdrückung eines Phasenfaktors kann daher

$$\psi(z, x, y) = \frac{p_0^{1/2}}{2 i \pi \hbar t \sqrt{p}} \iint_{\text{Blendenöffnung}} e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 s(x_0^2 + y_0^2) - 2 p_0 [x_0 (x - t \sin \gamma) + y_0 y])} dx_0 dy_0 \quad (95)$$

gesetzt werden. Die vor das Integral tretenden Phasenfaktoren sind nun in der Tat zur Berechnung der Stromdichte nicht erforderlich, so daß aus (95) die Richtigkeit der obigen Behauptung hervorgeht. Für die Strecke, um die die ganze Intensitätsverteilung jeweils verschoben erscheint, erhalten wir somit

$$d = t(z) \cdot \sin \gamma_0. \quad (96)$$

Beleuchtet man den Spalt mit zwei inkohärenten Elektronenbündeln, von denen das eine axial, das andere unter dem Neigungswinkel γ_0 gegen die Achse auftrifft, so werden sich die entsprechenden Intensitäten in den einzelnen Einstellebenen überlagern. Die Fresnelschen Beugungsstreifen werden unsichtbar werden, wenn die Verschiebung (96) der Intensitätskurve in der betrachteten Einstellebene gerade so groß ist, daß das erste Maximum des ersten Streifensystems auf das erste Minimum des Streifensystems der axial gerichteten Strahlung zu liegen kommt. Dies gibt uns die Möglichkeit, die Größe der zulässigen Neigung γ_0 abzuschätzen. Da der Abstand des ersten Minimums vom ersten Maximum der Beugungsstreifen in bekannter Weise in der Variablen v durch

$$v = \sqrt{7/2} - \sqrt{3/2} = 0,765 \quad (97)$$

gegeben ist, folgt auf Grund von (90) und (96) für $\sin \gamma_0$

$$\sin \gamma_0 \leq \sqrt{\frac{\pi \hbar s}{p_0 t}} \left(\sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = 0,65 \sqrt{\lambda_0 \frac{s}{t}}. \quad (98)$$

Stromdichteverteilung in verschiedenen Einstellebenen bei der Abbildung einer Kreislochblende

Als Objekt denken wir uns nun ein kleines Kreisloch (etwa ein Loch einer Diatomeenschale), das mit achsenparalleler Elektronenstrahlung beleuchtet wird. Das Kreisloch möge zur optischen Achse symmetrisch liegen. Unsere Aufgabe soll es sein, die Verteilung der Elektronenstromdichte in den einzelnen Einstellebenen zu untersuchen, wenn wir das Kreisloch durch eine Magnetlinse abbilden. Es empfiehlt sich natürlich in diesem Fall, Zylinderkoordinaten einzuführen. Für die Dingebene setzen wir

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 \cos \varphi_0 \\ y_0 &= r_0 \sin \varphi_0 \end{aligned} \quad \text{mit } 0 \leq r \leq R, \quad (99)$$

wobei also R den Radius der Lochblende darstellt. In der Einstellebene lauten die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (100)$$

Mit (99) und (100) nimmt die Gl. (67) folgende Gestalt an:

$$\psi(z, r, \varphi) = \frac{p_0^{3/2}}{2 i \pi \hbar t \sqrt{p}} e^{\frac{i p t'}{2 \hbar t}} r^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \psi_0 e^{\frac{i p_0}{2 \hbar t} [s r^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]} r_0 dr_0 d\varphi_0. \quad (101)$$

Die Wellenfunktion in der Dingebene ist bei senkrechtem Einfall

$$\psi_0 = 1. \quad (102)$$

Mit Hilfe der Definition

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \varphi} d\varphi \quad (103)$$

der nullten Bessel-Funktion, der Substitution

$$\frac{p_0 r}{\hbar t} r_0 = \eta \quad (104)$$

und der weiteren Abkürzung

$$\frac{\hbar s t}{2 p_0 r^2} = A \quad (105)$$

erhält man so für die Wellenfunktion

$$\psi = \frac{\hbar t}{i \sqrt{p_0 p}} \frac{1}{r^2} e^{\frac{i p t'}{\hbar}} \int_0^Y e^{i A \eta^2} J_0(\eta) \eta d\eta. \quad (106)$$

Dabei ist

$$Y = \frac{p_0 r}{\hbar t} R \quad (107)$$

gesetzt worden.

Zur Berechnung des Integrals

$$\int_0^Y e^{i A \eta^2} J_0(\eta) \eta d\eta \quad (108)$$

wenden wir nach E. Lommel¹²⁾ fortgesetzte partielle Integration unter Benutzung der Beziehung

$$\int \eta^{p+1} J_p(\eta) d\eta = \eta^{p+1} J_{p+1}(\eta) \quad (109)$$

an. Für (108) erhalten wir damit

$$\begin{aligned} & \{e^{i A \eta^2} [\eta J_1(\eta) - 2 i A \eta^2 J_2(\eta) - (2 A)^2 \eta^3 J_3(\eta) + \dots]\} \Big|_0^Y \\ &= e^{i A Y^2} \frac{1}{2 A} \{[2 A Y J_1(Y) - (2 A Y)^2 J_2(Y) + \dots] \\ &\quad - i [(2 A Y)^2 J_2(Y) - (2 A Y)^4 J_4(Y) + \dots]\}. \end{aligned} \quad (110)$$

Die beiden in eckigen Klammern stehenden unendlichen Reihen in (110) sind die durch diese Reihen definierten Lommelschen U-Funktionen. Setzt man

$$X = A Y^2 = \frac{p_0 R^2}{2 \hbar t(z)} = X(z), \quad (111)$$

so nehmen sie die Gestalt

$$\begin{aligned} U_1(X, Y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2X}{Y}\right)^{2n+1} J_{2n+1}(Y) \\ U_2(X, Y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2X}{Y}\right)^{2n+2} J_{2n+2}(Y) \end{aligned} \quad (112)$$

an. Mit Hilfe von (107), (111) und (112) erhalten wir für die Wellenfunktion (106)

$$\psi = \frac{\hbar t}{i \sqrt{p_0 p}} \frac{1}{r^2} e^{\frac{i p t'}{\hbar}} \frac{1}{2 A} [U_1 - i U_2] \cdot e^{\frac{i p_0 R^2 s(z)}{2 \hbar t(z)}}. \quad (113)$$

¹²⁾ E. Lommel, Abh. d. königl. bayr. Akad. d. Wiss. 15, 233 (1884).

Für die zugehörige Stromdichte erhält man damit

$$J_z = \frac{\hbar^2 t^2}{m p_0} \frac{1}{r^4} \left[\frac{Y^2}{2X} \right]^2 [U_1^2 + U_2^2]. \quad (114)$$

Wenn wir eine neue Funktion

$$M^2(X, Y) = \frac{1}{X^2} [U_1^2 + U_2^2] \quad (115)$$

eingeführen und für Y nach (107) einsetzen, ergibt sich

$$J_z = \frac{p_0^3 R^4}{4 m \hbar^2 t^2} \cdot M^2(X, Y) \quad (116)$$

als endgültige Darstellung der Stromdichte.

Die Funktionen $\frac{1}{X} U_1(X, Y)$ und $\frac{1}{X} U_2(X, Y)$, ebenso wie $M^2(X, Y)$, hat bereits E. Lommel für Argumente von 0 bis $Y = 12$ berechnet. Die Tafelwerte

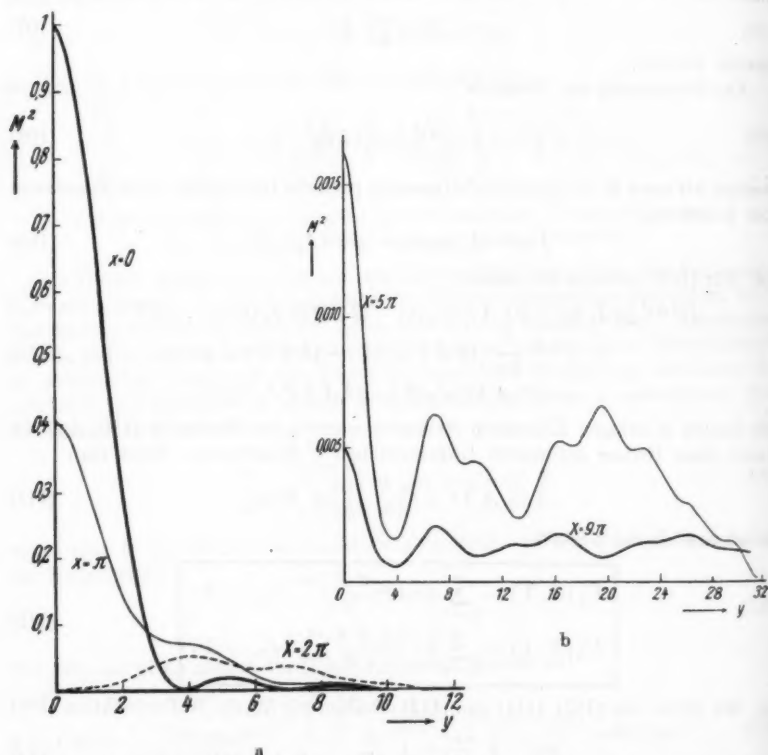


Abb. 3a und b. Abbildung einer Kreislochlende. Die zur Stromdichte proportionale Funktion $M^2(X, Y)$ in Abhängigkeit von X (bestimmt die Einstellebene) und von Y (bestimmt den Achsenabstand des Aufpunktes)

bis in das Schattengebiet hat E. Gütter¹⁴⁾ auf sechs Dezimalen genau weitergeführt, wobei er natürlich auch — für das beleuchtete Gebiet — die sogenannten Lommelschen V -Funktionen berechnen mußte. So ist die Funktion für $X = 9$ bis $Y = 30$ gerechnet. Ferner wurden die Maxima und Minima von $M^2(X, Y)$ berechnet.

In den Abb. 3a und b ist der Verlauf der Funktion $M^2(X, Y)$ für verschiedene X -Werte (d. h. Einstellebenen) wiedergegeben. Liegen die Funktionen ein für allemal

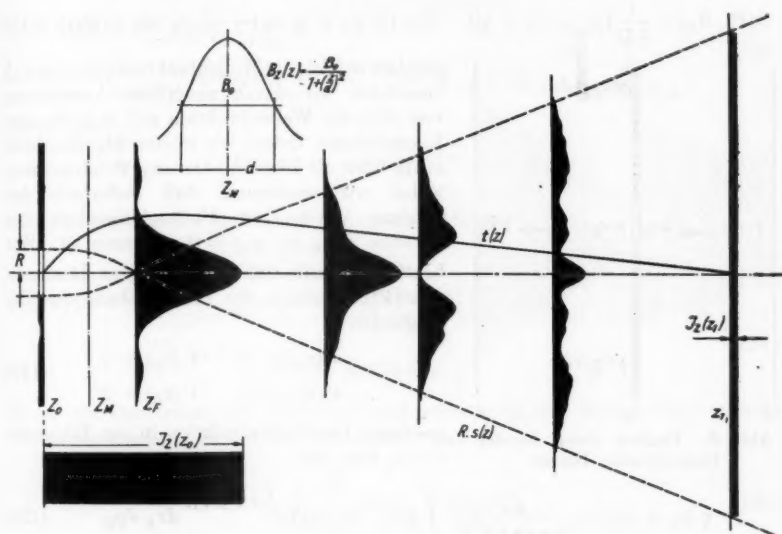


Abb. 4. Stromdichteverteilung in verschiedenen Einstellebenen bei der Abbildung einer Kreislochblende vom Radius $r = 10^{-5} d$ durch das magnetische Glockenfeld ($k^2 = 1$) mit der Vergrößerung $V = 10$

berechnet vor, so kann daraus die Intensitätsverteilung in jeder beliebigen Einstellebene eines elektronenoptischen Systems, für welches die beiden Hauptbahnen $s(z)$ und $t(z)$ bekannt sind, bestimmt werden.

Wählt man z. B. den Radius der Kreisblende $R = 10^{-5} d$ und die Beschleunigungsspannung 100 kV, so ergeben sich bei der Abbildung durch eine Magnetlinse des glockenförmigen Feldverlaufs für den Wert $k^2 = 1$ bei einer Vergrößerung von $V = 10$ die Stromdichteverteilungen nach Abb. 4. Dabei sind gleichfalls die berechneten Bahnen s und t eingezeichnet. Alle Längen werden in Vielfachen der Halbwertsbreite d des Glockenfeldes gemessen.

¹⁴⁾ E. Gütter, Wiener Diplomarbeit 1951. — Die Abb. 3 wurde dieser Arbeit entnommen.

6. Einfluß einer bündelbegrenzenden Blende auf die Abbildung

Um den Einfluß einer Blende auf die Abbildung zu erfassen, haben wir Formel (67) zweimal anzuwenden, wie es in Abb. 5 angedeutet ist. Wir berechnen zuerst die Wellenfunktion $\psi(z_B, x_B, y_B)$ in der Blendenebene $z = z_B$ nach (67):

$$\psi(z_B, x_B, y_B) = \frac{p_0^{3/4}}{2\pi i \hbar t_B \sqrt{p_B}} \int \psi(z_0, x_0, y_0) e^{\frac{i}{\hbar} S(P_0, P_B)} dx_0 dy_0, \quad (117)$$

wobei $S(P_0, P_B)$ durch

$$S(P_0, P_B) = \frac{1}{2} t_B [p_0 s_B (x_0^2 + y_0^2) - 2 p_0 (x_0 x_B + y_0 y_B) + p_B t'_B (x_B^2 + y_B^2)] \quad (118)$$

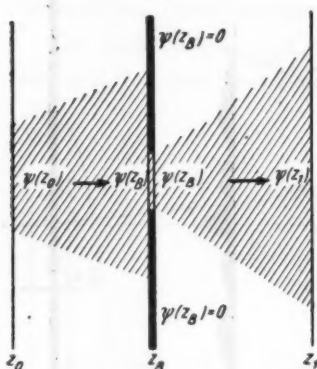


Abb. 5. Einfluß einer bündelbegrenzenden Blende

gegeben ist. Aus der Wellenfunktion $\psi(z_B, x_B, y_B)$ berechnen wir durch neuerliche Anwendung von (67) die Wellenfunktion $\psi(z, x, y)$ in der Einstellebene, indem wir in der Blendenebene allein über die Blendenöffnung \mathfrak{B} integrieren, wobei wir annehmen, daß außerhalb der Öffnung infolge der Undurchlässigkeit des Schirms $\psi(z_B, x_B, y_B) = 0$ zu setzen ist. Wir bezeichnen mit $\bar{t}(z)$ und $\bar{s}(z)$ jene Lösungen von (45), welche in der Blendenebene den Bedingungen

$$\begin{aligned} \bar{s}(z_B) &= 1; & \bar{t}(z_B) &= 0 \\ \bar{s}'(z_B) &= 0; & \bar{t}'(z_B) &= 0 \end{aligned} \quad (119)$$

genügen. Die Wellenfunktion in der Bildebene $z = z_1$ wird aus

$$\psi(z_1, x_1, y_1) = \frac{p_B^{3/4}}{2\pi i \hbar t_1 \sqrt{p_1}} \int_{\mathfrak{B}} \psi(z_B, x_B, y_B) e^{\frac{i}{\hbar} S(P_B, P_1)} dx_B dy_B \quad (120)$$

bestimmt, wobei $S(P_B, P_1)$ den Ausdruck

$$S(P_B, P_1) = \frac{1}{2} t_1 [P_B \bar{s}_1 (x_B^2 + y_B^2) - 2 p_B (x_B x_1 + y_B y_1) + p_1 t'_1 (x_1^2 + y_1^2)] \quad (121)$$

bedeutet.

Da $\bar{s}(z)$ und $\bar{t}(z)$ Linearkombinationen von s und t sein müssen, folgen aus (119), (56) und

$$(p \cdot t' s - s' t) = p_0$$

die Beziehungen

$$\bar{s} = \frac{p_B}{p_0} (t'_B s - s'_B t); \quad \bar{t} = \frac{p_B}{p_0} (s_B t - t_B s). \quad (122)$$

Indem man für $\psi(z_B, x_B, y_B)$ aus (117) in (120) einsetzt, erhält man wegen $t(z_1) = 0$

$$\psi(z_1, x, y) = \frac{p_0^{3/4}}{4\pi^2 \hbar^2 t_B^2 s_1 \sqrt{p_1}} \iint_{\mathfrak{B}} \psi(z_0, x_0, y_0) e^{\frac{i}{\hbar} [S(P_0, P_B) + S(P_B, P_1)]} dx_B dy_B dx_0 dy_0 \quad (123)$$

Dabei ist $S(P_0, P_B) + S(P_B, P_1)$ nach (118) und (121) durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$S(P_0, P_B) + S(P_B, P_1) = \frac{1}{2} t_B \left\{ p_0 s_B (x_0^2 + y_0^2) - 2 p_0 \left[\left(x_0 - \frac{x}{s_1} \right) x_B + \left(y_0 - \frac{y}{s_1} \right) y_B \right] - \frac{p_1}{s_1} (s_B t_1' - t_B s_1') (x^2 + y^2) \right\}. \quad (124)$$

Wir können damit schreiben

$$\psi(z_1, x_1, y_1) = \frac{p_0^{3/4}}{4 \pi^2 \hbar^2 s_1 t_B^2 \sqrt{p_1}} e^{-\frac{i p_1}{2 \hbar s_1 t_B} (s_B t_1' - t_B s_1') (x^2 + y^2)} \cdot e^{\frac{i}{2 \hbar t_B} \{ p_0 s_B (x_0^2 + y_0^2) - 2 p_0 \left[\left(x_0 - \frac{x}{s_1} \right) x_B + \left(y_0 - \frac{y}{s_1} \right) y_B \right] \}} dx_0 dy_0 dx_B dy_B. \quad (125)$$

Setzt man

$$K(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x_B \xi + y_B \eta)} dx_B dy_B, \quad (126)$$

so erhält man für die Wellenfunktion in der Bildebene

$$\psi(z_1, x, y) = \frac{p_0^2 e^{-\frac{i p_1}{2 \hbar s_1 t_B} (s_B t_1' - t_B s_1') (x^2 + y^2)}}{4 \pi^2 \hbar^2 s_1 t_B^2} \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} \int K \left[\frac{p_0}{\hbar t_B} \left(x_0 - \frac{x}{s_1} \right), \frac{p_0}{\hbar t_B} \left(y_0 - \frac{y}{s_1} \right) \right] \cdot e^{\frac{i p_0}{2 \hbar t_B} s_B (x_0^2 + y_0^2)} \psi(z_0, x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (127)$$

Wenn die Blendenöffnung unendlich groß wird, muß sich wieder eine scharfe Abbildung ergeben. In der Tat wird dann wegen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi\eta} d\eta = \delta(\xi) \quad (128)$$

$$K \left[\frac{p_0}{\hbar t_B} \left(x_0 - \frac{x}{s_1} \right), \frac{p_0}{\hbar t_B} \left(y_0 - \frac{y}{s_1} \right) \right] = \left(\frac{2\pi \hbar t_B}{p_0} \right)^2 \delta \left(x_0 - \frac{x}{s_1} \right) \delta \left(y_0 - \frac{y}{s_1} \right) \quad (129)$$

und (127) erhält die Gestalt

$$\psi(z_1, x, y) = e^{\frac{i p_1}{2 \hbar s_1} (x^2 + y^2)} \frac{1}{s_1} \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} \psi \left(z_0, \frac{x}{s_1}, \frac{y}{s_1} \right) \quad (130)$$

in Übereinstimmung mit (76).

7. Abbildung eines Objekts mit periodischer Struktur (Gitter)

Die obigen Betrachtungen werden besonders anschaulich, wenn wir sie speziell auf die Abbildung eines Objekts mit periodischer Struktur, z. B. ein Gitter, anwenden, das seit E. Abbe das typische Objekt für die Diskussion der Abbildung beim Mikroskop darstellt. Wenn die Spalte unendlich lang und zur y -Achse parallel sind, kann ein derartiges Objekt nach (2) durch die Funktion

$$f(x_0) = D(x_0) e^{i\sigma(x_0)/\hbar} \quad (131)$$

dargestellt werden, wobei die reellen Funktionen $D(x_0)$ bzw. $\sigma(x_0)$ die Durchlässigkeit bzw. die Phasenänderung beim Durchtritt darstellen.

Wir wollen weiter annehmen, daß die Blende die Gestalt eines Rechtecks habe, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind. Bedeuten a und b dessen Seitenlängen, so erhält man nach (126)

$$K\left(\frac{p_0}{\hbar t_B} x, \frac{p_0}{\hbar t_B} y\right) = a b \frac{\sin \omega x}{\omega x} \frac{\sin \omega' y}{\omega' y}, \quad (132)$$

wobei

$$\omega = \frac{p_0 a}{2 \hbar t_B}, \quad \omega' = \frac{p_0 b}{2 \hbar t_B} \quad (133)$$

gesetzt worden ist.

Wir wollen voraussetzen, daß das Objekt durch eine auf der Achse im Punkte $z = z_Q$ befindliche „punktförmige“ Elektronenquelle beleuchtet wird. Die auf das Objekt auftreffende Elektronenwelle können wir der Gl. (67) entnehmen, indem wir x_0, y_0 durch $x_Q = 0, y_Q = 0$ und x, y durch x_0, y_0 ersetzen. Wenn wir die am Orte der Elektronenquelle verschwindende Lösung von (45) mit $\tau(z)$ bezeichnen, erhalten wir für die allein vom Achsenelement dx_Q, dy_Q ausgehende Teilwelle

$$\psi(z_0, x_0, y_0) = \text{konst.} \cdot e^{\frac{i p_0 \tau'_0}{2 \hbar} (x_0^2 + y_0^2)}. \quad (134)$$

Da $\tau(z)$ eine Linearkombination von s und t sein muß:

$$\tau(z) = c_1 s + c_2 t \quad (135)$$

und da

$$\tau(z_Q) = c_1 s(z_Q) + c_2 t(z_Q) = 0, \quad (136)$$

folgt, daß (146) in der Gestalt

$$\psi_0(z_0, x_0, y_0) = C \cdot e^{-\frac{i p_0 s(z_Q)}{2 \hbar} (x_0^2 + y_0^2)} \quad (137)$$

geschrieben werden kann. Für die Wellenfunktion unmittelbar hinter dem Objekt erhält man daher nach (4)

$$\psi(z_0, x_0, y_0) = f(x_0) \psi_0 = C f(x_0) e^{-\frac{i p_0 s(z_Q)}{2 \hbar} (x_0^2 + y_0^2)}. \quad (138)$$

Einsetzen in (127) ergibt

$$\begin{aligned} \psi(z_1, x_1, y_1) = & C \cdot e^{\frac{i p_1}{2 \hbar} (t_B s'_1 - s_B t'_1) (x_1^2 + y_1^2)} \left(\frac{p_0}{2 \pi \hbar t_B} \right)^2 \frac{1}{s_1} \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} \\ & \cdot a b \int \frac{\sin \omega \left(x_0 - \frac{x}{s_1}\right)}{\omega \left(x_0 - \frac{x}{s_1}\right)} \cdot \frac{\sin \omega' \left(y_0 - \frac{y}{s_1}\right)}{\omega' \left(y_0 - \frac{y}{s_1}\right)} f(x_0) e^{\frac{i p_0}{2 \hbar} \left(\frac{s_B}{t_B} - \frac{s_Q}{t_Q}\right) (x_0^2 + y_0^2)} dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (139)$$

Die Integration wird sehr vereinfacht, wenn wir durch geeignete Wahl des Blendenortes z_B

$$\frac{s_B}{t_B} = \frac{s_Q}{t_Q} \quad (140)$$

machen; z_B ist dann konjugiert zum Ort z_Q der Elektronenquelle. Wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi \quad (141)$$

erhalten wir den Ausdruck

$$\psi(z_1, x_1, y_1) = \frac{p_0 a C}{2\pi \hbar s_1 t_B} \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} e^{\frac{i p_1}{2\hbar s_1 t_B} (t_B s_1' - s_B t_1') (x_1^2 + y_1^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0) \frac{\sin \omega (x_0 - x/s_1)}{\omega (x_0 - x/s_1)} dx_0. \quad (142)$$

Die Funktion $f(x_0)$ soll nun periodisch sein mit der Periode d als Ausdruck der Gitterstruktur

$$f(x_0 + d) = f(x_0). \quad (143)$$

Wir können daher $f(x_0)$ in eine Fourierreihe entwickeln:

$$f(x_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{\frac{2\pi i}{d} m x_0}. \quad (144)$$

Wir setzen diese Reihe in (142) ein und erhalten

$$\psi(z_1, x_1, y_1) = \frac{p_0 a C}{2\pi \hbar s_1 t_B} \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} e^{\frac{i p_1 (t_B s_1' - s_B t_1')}{2\hbar s_1 t_B} (x_1^2 + y_1^2)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m K_m e^{\frac{2\pi i}{d} m x_1}, \quad (145)$$

wobei K_m eine Abkürzung für die Integrale

$$K_m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i}{d} m x} \frac{\sin \omega x}{\omega x} dx \quad (146)$$

bedeutet. Auswertung — etwa durch Verformung des Integrationswegs im Komplexen — gibt

$$K_m = \begin{cases} \pi/\omega & \frac{\omega d}{2\pi} > m > -\frac{\omega d}{2\pi} \\ 0 & m > \frac{\omega d}{2\pi} \text{ oder } m < -\frac{\omega d}{2\pi} \end{cases} \quad (147)$$

Ist also m_g die größte ganze Zahl, welche der Bedingung

$$m_g < \frac{\omega d}{2\pi} = \frac{p_0 a d}{4\pi \hbar t_B} = \frac{a d}{2 \lambda_0 t_B} \quad (148)$$

genügt, so gilt für die Wellenfunktion in der Bildebene

$$\psi(z_1, x_1, y_1) = \frac{1}{s_1} \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} e^{\frac{i p_1 (t_B s_1' - s_B t_1')}{2\hbar s_1 t_B} (x_1^2 + y_1^2)} \sum_{m=-m_g}^{+m_g} c_m e^{\frac{2\pi i}{d} m x_1}. \quad (149)$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir zunächst, daß die Elektronenstromdichte $J_z = p_1 |\psi|^2 / m$ in der Bildebene

$$J_z(x_1) = \frac{1}{s_1^2} |C|^2 \frac{p_0}{m} \left| \sum_{m=-m_g}^{+m_g} c_m e^{\frac{2\pi i}{d} m x_1} \right|^2 \quad (150)$$

für $m_g > 1$ eine periodische Funktion mit der Periode $s_1 d = V d$ darstellt:

$$J_z(x_1 + V d) = J_z(x_1). \quad (151)$$

Die Periodenlänge ist also um den Faktor $|V|$ gestreckt. Im Falle, daß m^* eine sehr große Zahl ist, geht die Fourierreihe in den Absolutstrichen in die Entwicklung von $f(x_1/V)$ über, wodurch (77) wieder bestätigt wird.

Ist in der Reihe (149) nur das konstante Glied von Null verschieden, so verliert die Abbildung vollkommen ihre Objektähnlichkeit — es ergibt sich eine konstante Verteilung der Stromdichte über die Bildebene und es kommt nicht einmal mehr die periodische Struktur des Objekts zum Ausdruck. Dies ist nach (148) der Fall, wenn

$$\frac{a d}{2 t_B \lambda_0} < 1 \quad (152)$$

ist. Diese Bedingung für die Auflösungsgrenze d geht durch Einführung der Apertur des abbildenden Bündels

$$\gamma_0 = \frac{a/2}{t_B} \quad (153)$$

in

$$d < \lambda_0 / \gamma_0 \quad (154)$$

über. Die in (154) enthaltene Aussage stimmt im paraxialen Bereich, für den sie ja nur abgeleitet wurde, mit der von E. Abbe für Nichtselbstleuchter in der Lichtoptik angegebenen Abbildungsgrenze $d < \lambda / \sin \gamma_0$ überein.

Je größer der Blendendurchmesser a bzw. die Apertur wird, desto mehr Glieder enthält die Fourierreihe und desto objektähnlicher wird das Bild. Die Fourierkoeffizienten c_m stellen, wie es ja zu erwarten ist, die m -ten Beugungsspektren dar, die sich bei der vorliegenden Beleuchtungsart in der Ebene $z = z_B$ einstellen.

Mit Hilfe der allgemeinen Gl. (67) und der Formel für $\psi(z_0)$ (4) ergibt sich für die Wellenfunktion in der Fraunhoferschen Ebene $z = z_B$ der Ausdruck

$$\psi(x_B) \sim \int f(x_0) e^{-i p_0 x_B x_0 / \hbar} dx_0, \quad (155)$$

wobei die Integration über das ganze Gitter zu erstrecken ist. Da es sich selbstverständlich nur um ein endliches Gitter handeln kann, konvergiert das Integral (155). Setzt man für $f(x_0)$ die Fourierreihe (144) ein, so ergibt sich

$$\psi(x_B) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m \int e^{i (2 \pi m / d - p_0 x_B / \hbar t_B) x_0} dx_0. \quad (156)$$

Da die Integranden in (156) so lange rasch oszillierende Funktionen darstellen, als der Klammerausdruck von 0 verschieden ist, werden sich ihre Beiträge zum Integral in diesen Gebieten größtenteils aufheben. Nur jene Strahlrichtungen, für die

$$\frac{2 \pi d}{m} = \frac{p_0 x_B}{\hbar t_B} \quad (157)$$

gilt, geben einen wesentlichen Beitrag zur Intensität in der Blendenebene (im übrigen kann man sich auch durch eine Auswertung für eine endliche Gitterlänge davon überzeugen¹⁸).

Durch Einführung des Neigungswinkels γ_0 der Wellennormalen, bzw. der Strahlen zur optischen Achse

$$\gamma_0 = x_B / t_B \quad (158)$$

und der de Broglie-Wellenlänge λ_0 erkennen wir, daß (157) mit der Bedingung

$$d \cdot \gamma_{0,m} = m \lambda_0 \quad (159)$$

identisch ist.

¹⁸) Vgl. z. B. Müller-Pouillet II, Optik, erste Hälfte, Tafel V (Abb. 566).

Diesen Beugungsmaxima entsprechen die Werte der Wellenfunktion

$$\psi(x_{B,m}) \sim c, \quad (160)$$

während in $x_B \neq x_{B,m}$ die Wellenfunktion praktisch Null gesetzt werden kann.

Das „Abschneiden“ der Fourierreihe ist daher anschaulich als „Ausblenden“ der höheren Beugungsspektren zu verstehen. Die Intensitäten der einzelnen Beugungsordnungen nehmen im allgemeinen mit der Ordnungszahl ab. Für Funktionen $f(x)$ mit endlich vielen Maximis und Minimis gilt bekanntlich eine für alle m gleichmäßig gültige Abschätzung¹⁶⁾

$$|c_m| \leq \frac{M}{|m|}. \quad (161)$$

Erfolgt die Abnahme der Intensität mit der Ordnungszahl sehr rasch, so wird bereits eine gewisse endliche Blendengröße genügen, damit die von ihr erfaßten Spektren praktisch die ganze Intensität repräsentieren. In diesem Falle haben

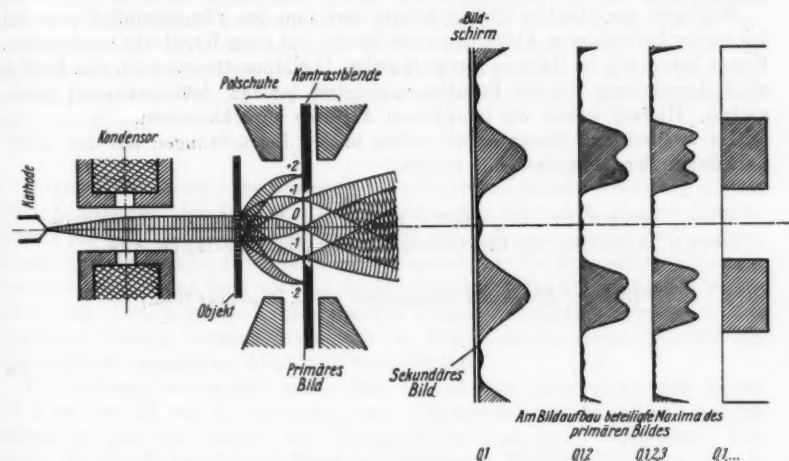


Abb. 6. Bildentstehung im Elektronenmikroskop bei der Abbildung eines Amplitudengitters. Die am Gitter gebeugten Elektronen werden vom Objektiv in der „Fraunhoferischen Ebene“ zu entsprechenden Beugungsmaximis vereinigt (primäres Bild). Die von der Objektivblende nicht abgeschirmten Beugungsspektren bauen in der Gaußschen Bildebene das Elektronenbild auf (sekundäres Bild). Die aufeinanderfolgenden Intensitätsverteilungen zeigen wie mit zunehmender Anzahl der von der Objektivapertur erfaßten Beugungsmaxima die Objektivähnlichkeit der Abbildung wächst

wir bereits ein objektgetreues Bild, und eine weitere Vergrößerung der Apertur wird die Objektähnlichkeit des Bildes nicht mehr steigern. Gerade in der Elektronenmikroskopie werden wir bei der Elektronenbeugung am Objekt einen sehr raschen Intensitätsabfall mit dem Beugungswinkel zu erwarten haben.

Die soeben über die Abbildung eines mit Elektronen bestrahlten Gitters durchgeführten Betrachtungen decken sich in ihrem qualitativen Inhalt nach mit der

¹⁶⁾ Vgl. z. B. W. Rogosinski, Fouriersche Reihen, Sg. Göschen, Leipzig-Berlin 1930, Satz V.

Theorie der Abbildung von Nichtselbstleuchtern, wie sie von E. Abbe und Lord Rayleigh entwickelt worden ist. Insbesondere finden wir in der „Fraunhofer-schen Ebene“, also der zur Elektronenquelle konjugierten Ebene, das aus den Fraunhoferschen Beugungserscheinungen aufgebaute „primäre Bild“. Aus diesem wird durch interferenzmäßige Überlagerung das eigentliche („sekundäre“) Bild aufgebaut. In Abb. 6 sind diese Verhältnisse noch einmal zusammenfassend dargestellt.

Unsere Lösung der paraxialen Schrödinger-Gleichung (67) hat es erlaubt, diesen Anschluß herzustellen. Die wellenmechanische Behandlung erscheint uns nur insofern befriedigender und einheitlicher, als hier die Wirkung des Abbildungsfeldes unmittelbar von der Schrödingerschen Wellengleichung mit-erfaßt wird, während in der Lichtoptik geometrisch-optische und wellenoptische Überlegungen nebeneinanderherlaufen. Auch zeigt sich hier viel deutlicher, daß die optische Abbildung die Wirkung einer zweifachen Beugung, nämlich am Objekt und an der Blende darstellt.

Wie beim periodischen Objekt könnte man nun den Blendeneinfluß auch bei der vorher betrachteten Abbildung eines Spalts und eines Kreislochs untersuchen. Ferner kann man im Rahmen der paraxialen Abbildungstheorie auch den Einfluß einer Abweichung von der Rotationssymmetrie (axialer Astigmatismus) untersuchen. Hierauf wollen wir in späteren Arbeiten zurückkommen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit sollen unsere Betrachtungen auf den nicht-paraxialen Bereich ausgedehnt werden.

Wien, Institut für angewandte Physik der Technischen Hochschule;
Berlin, Abteilung für Elektronenoptik der Siemens-Halske A.G.

(Bei der Redaktion eingegangen am 2. Dezember 1952.)

Elektronenoptische Abbildungen auf Grund der Wellenmechanik. II

Von Walter Glaser und Peter Schiske

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die Wellenfunktion in einer beliebigen Einstellebene wird aus ihrem vorgegebenen Verlauf in einer bestimmten Ebene (der Dingebene) für ein vorgegebenes elektrisch-magnetisches Abbildungsfeld mit Hilfe der Greenschen Formel bestimmt. Es wird dazu das Analogon der Kirchhoffschen Beugungsformel für den felderfüllten Raum aufgestellt. Auf diese Weise ergibt sich eine konsequente wellenmechanische Theorie der Bildfehler elektrostatischer und magnetischer Elektronenlinsen.

Im ersten Teil dieser Arbeit haben wir die elektronenoptische Abbildung mittels der Schrödinger-Gleichung für das paraxiale Gebiet behandelt. Von der Voraussetzung der paraxialen Abbildung wollen wir uns nun im folgenden frei machen. Unsere Aufgabe besteht daher darin, ganz allgemein die Wellenfunktion im ganzen Raum zu finden, wenn ihr Verlauf in der Dingebene und das Abbildungsfeld vorgegeben sind. Unsere jetzigen Betrachtungen können unabhängig vom ersten Teil verstanden werden; zugleich werden wir die Ergebnisse des ersten Teils für den Spezialfall der paraxialen Abbildung wiederfinden.

Wir nehmen unmittelbar hinter dem Objekt eine achsensenkrechte Ebene $z = z_0$ an, die wir mit E_0 bezeichnen und „Dingebene“ nennen wollen. Auf ihr denken wir uns den Verlauf der Wellenfunktion $\psi(x_0, y_0, z_0)$ vorgegeben. Um daraus die der Schrödinger-Gleichung genügende Wellenfunktion im ganzen Raum zu berechnen, gehen wir in enger Analogie zu den Betrachtungen vor, die zur Aufstellung der Kirchhoffschen Beugungsformel unternommen werden. Wir schreiben die Schrödinger-Gleichung in der Gestalt

$$\Pi \psi = \left\{ -\hbar^2 \Delta + \frac{2\hbar e}{i} \mathfrak{A} \text{ grad} + e^2 \mathfrak{A}^2 - p^2 \right\} \psi = 0, \quad (1)$$

wobei Π eine Abkürzung für den in der geschwungenen Klammer stehenden Differentialoperator darstellt. Die Größe p^2 bedeutet das Quadrat des gewöhnlichen Impulses, also $2em\varphi$ bzw., wenn man die Massenveränderlichkeit in Betracht zieht

$$p^2 = 2m_0 e \varphi \left(1 + \frac{e}{2m_0 c^2} \varphi \right). \quad (2)$$

Wir bilden nun die Ausdrücke

$$\Pi u = -\hbar^2 \Delta u + \frac{2\hbar e}{i} \mathfrak{A} \text{ grad} u + e^2 \mathfrak{A}^2 u - p^2 u \quad (3)$$

und

$$\Pi^* v = -\hbar^2 \Delta v - \frac{2\hbar e}{i} \mathfrak{A} \operatorname{grad} v + e^2 \mathfrak{A}^2 v - p^2 v. \quad (4)$$

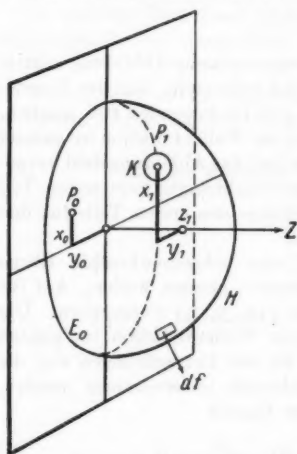
Multiplizieren wir (3) mit v , (4) mit u und subtrahieren die beiden Terme, so erhalten wir die für zwei beliebige Funktionen u und v geltende Identität

$$v \Pi u - u \Pi^* v = \frac{\hbar}{i} \operatorname{div} \left\{ \frac{\hbar}{i} (v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v) + 2e \mathfrak{A} u v \right\}. \quad (5)$$

Wählt man ein Raumgebiet τ , innerhalb dessen sich die beiden Funktionen u und v stetig verhalten, und integriert man (5) über dieses Volumen, so kann man wegen der vorausgesetzten Stetigkeit den Gaußschen Satz anwenden und gelangt zu

$$\int_{\tau} [v \Pi u - u \Pi^* v] d\tau = \frac{\hbar}{i} \int_{\mathcal{F}} \left[\frac{\hbar}{i} (v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v) + 2e \mathfrak{A} u v \right] df. \quad (6)$$

Unter df ist dabei das nach außen gerichtete Flächenelement der Umhüllung von τ zu verstehen. Die so erhaltene Greensche Formel soll uns nun dazu dienen, die Wellenfunktion in einem bestimmten Raumpunkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ innerhalb τ aus den Werten von ψ auf der Hülle zu berechnen.



Als die eine begrenzende Hülle des Integrationsgebietes wählen wir nach Abb. 1 eine Halbkugel H , deren Grundfläche E_0 mit der Objektebene $z = z_0$ zusammenfällt. Den Radius dieser Halbkugel werden wir nachträglich gegen unendlich gehen lassen. Die Punkte der Objektebene E_0 bezeichnen wir wie bisher mit $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Die beiden Funktionen $u = \psi, v = G$ sollen innerhalb des Gebietes τ der Schrödinger-Gleichung bzw. der konjugierten Gleichung

$$\Pi^* v = \left\{ -\hbar^2 \Delta v - \frac{2\hbar e}{i} \mathfrak{A} \cdot \operatorname{grad} v + e^2 \mathfrak{A}^2 v - p^2 v \right\} \cdot v = 0 \quad (7)$$

Abb. 1. Zur Herleitung von Gl. (22) genügen. Damit verschwindet die linke Seite von Gl. (6) und es bleibt allein das Integral über die Hülle $H + E_0$. Von der Lösung v setzen wir speziell voraus, daß sie im Aufpunkt P_1 unendlich wird. Wir wollen sie mit

$$v = G(x, y, z, x_1, y_1, z_1) \quad (8)$$

bezeichnen. Die Art der Singularität in P_1 werden wir später festlegen. Jedenfalls müssen wir den Punkt P_1 durch eine kleine Kugel K mit dem Radius r abschließen. Die Integration (6) ist also über die äußere Hülle $H + E_0$ und über die

Oberfläche der Kugel K zu erstrecken. Da die Normale auf die Begrenzungs-
ebene $z = z_0$ mit der negativen z -Achse zusammenfällt, gilt

$$\text{grad } \psi d\mathbf{f} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} dx_0 dy_0; \quad \text{grad } G d\mathbf{f} = -\frac{\partial G}{\partial z} dx_0 dy_0. \quad (9)$$

Auf der Oberfläche der kleinen Kugel K können wir

$$\text{grad } \psi d\mathbf{f} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} r^2 d\Omega_K; \quad \text{grad } G d\mathbf{f} = -\frac{\partial G}{\partial r} r^2 d\Omega_K \quad (10)$$

setzen, wenn $d\Omega_K$ das Flächenelement auf der Einheitskugel (Raumwinkelelement) bedeutet. Analoges gilt für die Halbkugel vom Radius R . Die Beziehung (6) erhält so die Gestalt:

$$\begin{aligned} \int_K \left(G \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{2e\hbar}{\hbar} A_r \psi G \right) r^2 d\Omega_K = \\ = - \int_{E_0} \left(G \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{2e\hbar}{\hbar} A_z \psi G \right) dx_0 dy_0 + \\ + \int_H \left(G \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{2e\hbar}{\hbar} A_R \psi G \right) R^2 d\Omega_H. \end{aligned} \quad (11)$$

Nach Voraussetzung ist uns die Lösung der Schrödinger-Gleichung nur auf der „Objektebene“ E_0 bekannt. Wir werden daher trachten, den beiden Lösungen $v = G$ und $u = \psi$ solche Grenzbedingungen auf der Halbkugel aufzuerlegen, daß der Beitrag von H in (11) verschwindet, wenn wir mit $R \rightarrow \infty$ gehen. Dies kann leicht erreicht werden, da ψ auf der Halbkugelfläche eine ausstrahlende Strömung darstellen muß. Man braucht lediglich dieses Ausstrahlungsverhalten als „Randbedingung im Unendlichen“ für ψ und G vorzuschreiben.

Wir setzen voraus, daß das Vektorpotential \mathfrak{A} im Unendlichen wie $1/R$ verschwindet und daß das elektrische Potential in den konstanten Wert φ_∞ übergeht. Wir nehmen also an, daß die felderzeugenden Ladungen und Ströme im Endlichen liegen. Für $R \rightarrow \infty$ geht die Schrödinger-Gleichung (1) dann in

$$\hbar^2 \Delta \psi + p_\infty^2 \psi = 0 \quad (p_\infty = \sqrt{2em\varphi_\infty}) \quad (12)$$

über.

Wir verwenden Polarkoordinaten (R, ϑ, χ) . Auf der Halbkugel wird also asymptotisch für großes R

$$\psi = \frac{A(\vartheta, \chi)}{R} e^{i c(\vartheta, \chi) R} \quad (c > 0) \quad (13)$$

gelten. Einsetzen in (12) und Unterdrückung von Termen mit $1/R^2$ liefert

$$\psi = \frac{A(\vartheta, \chi)}{R} e^{i p_\infty R / \hbar} \quad (14)$$

Wenn man das genauere Verhalten von \mathfrak{A} und φ im Unendlichen in Betracht zieht, kann man die asymptotische Entwicklung weiter treiben, so daß ψ in der

Gestalt

$$\psi = \frac{1}{R} e^{i p_{\infty} R/\hbar} \left(A_0 + \frac{A_1}{R} + \frac{A_2}{R^2} + \dots \right) \quad (15)$$

geschrieben werden kann, wobei die A_k bestimmte Funktionen von ϑ und χ darstellen.

Analog fordern wir nun, daß

$$G = \frac{1}{R} e^{i p_{\infty} R/\hbar} \left(B_0 + \frac{B_1}{R} + \frac{B_2}{R^2} + \dots \right) \quad (16)$$

gilt. Mit (15) und (16) finden wir

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_H \left(G \frac{\partial \psi}{\partial R} - \psi \frac{\partial G}{\partial R} + \frac{2 e i}{\hbar} A_R \psi G \right) R^2 d\Omega_H &= \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} e^{2 i p_{\infty} R/\hbar} \int_H \left(\frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{R} + \dots \right) d\Omega_H = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Die Punkte deuten dabei Glieder von höherer Ordnung in $1/R$ an.

Wir haben nun in (11) noch das Integral über die Kugel K auszuwerten. Wenn wir r gegen Null gehen lassen, d. h. die Kugel K auf den Punkt P_1 zusammenziehen, verschwinden auf der linken Seite von (11) das erste und das letzte Glied. Die Funktion G soll nun in P_1 wie $1/r$ gegen Unendlich gehen, so daß $Gr \cdot r \frac{\partial \psi}{\partial r}$ mit r gegen Null geht. Auf der linken Seite von (11) bleibt also noch der Ausdruck

$$-\lim_{r \rightarrow 0} \int_K \psi \frac{\partial G}{\partial r} r^2 d\Omega_K = -\psi(P_1) \lim_{r \rightarrow 0} \int_K \frac{\partial G}{\partial r} r^2 d\Omega_K. \quad (18)$$

Der rechtsstehende Grenzprozeß führt zu einem endlichen Wert, da in der Nähe von P_1 die Funktion $G \sim 1/r$, also $\partial G/\partial r \sim 1/r^2$ vorausgesetzt wurde. Da G infolge der Linearität der Schrödinger-Gleichung stets mit einer Konstanten multipliziert werden darf, können wir diesen Grenzwert gleich 1 setzen:

$$-\lim \int \frac{\partial G}{\partial r} r^2 d\Omega_K = 1. \quad (19)$$

Damit erhalten wir endgültig aus (11) die Formel

$$\psi(P_1) = - \int_{E_0} \left(G \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{2 e i}{\hbar} A_z \psi G \right) dx_0 dy_0. \quad (20)$$

Diese Beziehung kann uns dazu dienen, aus dem Verlauf von ψ und dem seiner Normalableitung $\partial \psi/\partial z$ auf der Ebene E_0 bei bekannter Funktion G die Wellenfunktion $\psi(P_1)$ in jedem beliebigen Punkt P_1 zu berechnen. Wenn wir die Funktion G so bestimmen können, daß sie außerdem in der ganzen Bildebene verschwindet

$$G = 0 \text{ auf } E_0, \quad (21)$$

so geht (20) über in

$$(15) \quad \psi(x_1, y_1, z_1) = \int_{E_0} \psi(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial G}{\partial z} dx_0 dy_0 \quad (22)$$

χ dar-

und zur Berechnung von $\psi(P_1)$ genügt allein der Verlauf von $\psi(P_0)$ auf E_0 . Nach der Formel (22) kommt so alles darauf hinaus, eine geeignete Darstellung einer Lösung der konjugierten Schrödinger-Gleichung (7) mit den Eigenschaften (16), (19) und (21), also der Greenschen Funktion G zu finden.

(16) Aufstellung der Greenschen Funktion. Wir setzen die Greensche Funktion G aus zwei Teilfunktionen $G_s(P, P_1)$ und $G_r(P, P_1)$ additiv zusammen;

$$G(P, P_1) = G_s(P, P_1) + G_r(P, P_1). \quad (23)$$

Der „singuläre“ Teil G_s möge allen Anforderungen mit Ausnahme von (21) genügen. Der „reguläre Teil“ G_r , der in P_1 endlich bleibt, möge durch sein Hinzutreten auch noch die Forderung (21) erzwingen. Selbstverständlich muß $G_r(P, P_1)$ ebenfalls der konjugierten Schrödinger-Gleichung (7) genügen und das vorgeschriebene Verhalten im Unendlichen zeigen.

Für G_s machen wird den Ansatz

Wenn
nmen-
Glie-

$$G_s(P, P_1) = a(P, P_1) e^{-\frac{i}{\hbar} S(P, P_1)}, \quad (24)$$

r $\frac{\partial \psi}{\partial r}$
druck

wobei a und S reelle Funktionen darstellen sollen. Wir haben abweichend vom üblichen Ansatz den Exponenten mit negativen Vorzeichen geschrieben, weil G_s der konjugierten Schrödinger-Gleichung genügen soll. Gl. (7) können wir mit (24) in zwei reelle Gleichungen aufspalten:

$$(18) \quad (\text{grad } S + e \mathcal{U})^2 - p^2 - \hbar^2 \frac{\text{div grad } a}{a} = 0 \quad (25)$$

und

$$\text{div } a^2 (\text{grad } S + e \mathcal{U}) = 0. \quad (26)$$

Das Glied

$$\hbar^2 \frac{\text{div grad } a}{a^2} \quad (26)$$

a der
e. Da
anten

brauchen wir nur an Stellen mit „rasch veränderlichem“ a in Betracht zu ziehen. In allen anderen Fällen wird die Funktion S durch die Eikonalgleichung (Hamilton-Jacobische Differentialgleichung)

$$(\text{grad } S + e \mathcal{U})^2 - p^2 = 0 \quad (27)$$

(20)

bestimmt. Nach bekannten Sätzen genügt die Wirkungsfunction

$$S(P_1, P) = \int_{P_1}^P (m v ds - e \mathcal{U} dr) \quad (28)$$

der Differentialgleichung (27).

Um die Forderung (16) zu erfüllen, muß man als Integrationsweg jeweils die von P nach P_1 laufende Bahn wählen; den Parameter s (die Bogenlänge) hat man so zu zählen, daß er beim Fortschreiten von P_1 nach P abnimmt.

(21)

Wir wollen zeigen, daß die durch G_s beschriebene Elektronenbewegung in der nächsten Umgebung des Aufpunktes P_1 als eine Radialströmung (Quellströmung) aufgefaßt werden kann. Im Punkte P , der sich in unmittelbarer Nähe des Aufpunktes P_1 befinden soll, können wir die Bahnkrümmung vernachlässigen und erhalten für (28)

$$S(P_1, P) = -m v_1 r - e \mathfrak{A}_1(r), \quad (29)$$

wobei r den Radiusvektor der Länge r von P_1 nach P bedeutet. Für grad S erhält man aus (29)

$$\text{grad } S = -m v_1 \frac{r}{r} - e \mathfrak{A}_1, \quad (30)$$

so daß Gl. (26) in der Umgebung von P_1 die Gestalt

$$\text{div} \left(a^2 m v_1 \frac{r}{r} \right) = 0 \quad (31)$$

erhält. Die nächstliegende Lösung dieser Gleichung ist

$$a = C/r, \quad (32)$$

denn wegen

$$a^2 \frac{r}{r} = C^2 \frac{r}{r^3} = -C^2 \text{grad } 1/r \quad (33)$$

wird (31) mit der bekannten Beziehung

$$\Delta a = C \text{div grad } (1/r) = 0 \quad (34)$$

identisch. Gl. (34) zeigt unmittelbar, daß in der Nähe des Konvergenzpunktes P_1 das wellenmechanische Zusatzglied (26) vernachlässigt werden darf. Nach (29) und (32) wird daher in der unmittelbaren Umgebung von P_1 die Funktion G_s durch

$$G_s = \frac{C}{r} e^{i(m v_1 r + e \mathfrak{A}_1(r))/\hbar} \quad (35)$$

dargestellt. Aus der Beziehung (19) bestimmt sich die Konstante C in (35) zu $1/4\pi$, so daß a in der Umgebung von P_1 nach (32) durch

$$a = \frac{1}{4\pi r} \quad (36)$$

gegeben ist. In makroskopischen Feldern, zu denen unsere Abbildungsfelder zählen, kann das Zusatzglied (26) als verschwindend klein vernachlässigt werden. Eine Ausnahme könnte höchstens im Konvergenzpunkt P_1 auftreten. Gl. (34) hat uns aber gezeigt, daß das nicht der Fall ist. Wir können daher S konsequent aus der Eikonalgleichung (27) bestimmen. Das zugehörige a wird aus der Kontinuitätsgleichung (26) bestimmt, wobei wir zu berücksichtigen haben, daß bei Annäherung an den Punkt P_1 die Funktion a asymptotisch in (36) übergehen muß. Dadurch ist aber, wie wir sehen werden, a eindeutig bestimmt.

Nun haben wir noch $G_r(P, P_1)$ darzustellen. In naheliegender Weise machen wir den Ansatz

$$G_r = -\bar{a} e^{-i\bar{S}/\hbar}, \quad (37)$$

so daß G durch

$$G = a e^{-iS/\hbar} - \bar{a} e^{-i\bar{S}/\hbar} \quad (38)$$

gegeben ist. Zur Erfüllung von (21) hat man dann nur auf E_0 die Gültigkeit der Beziehungen

$$\begin{aligned} a(E_0) &= a(E_0) \\ S(E_0) &= S(E_0) \end{aligned} \quad (39)$$

zu verlangen. Wenn wir wieder (26) vernachlässigen, können wir die klassischen Werte von \bar{S} benutzen. Wir benötigen aber nur die Normalableitungen von G_r auf E_0 . Es genügt daher, wenn G_r lediglich in der Umgebung von E_0 mit der klassisch bestimmten Funktion \bar{S} dargestellt werden kann. Auf E_0 haben wir nun

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial z_0} + e A_{z0} = \pm \sqrt{m^2 v_0^2 - \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial x_0} + e A_{x0} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial y_0} + e A_{y0} \right)^2}. \quad (40)$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen muß aber auf E_0 nach (39) mit dem entsprechenden Ausdruck für S übereinstimmen. Dieser kann wieder durch $\partial S / \partial z_0$ ausgedrückt werden. Auf diese Weise erhält man auf E_0

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial z_0} + e A_{z0} = \pm \left(\frac{\partial S}{\partial z_0} + e A_{z0} \right). \quad (41)$$

Das positive Vorzeichen würde auf E_0 zu $\partial \bar{S} / \partial z_0 = \partial S / \partial z_0$ führen, was bedeutet, daß G_r und $-G_r$ identisch sind. Das kommt natürlich nicht in Frage. Es gilt daher

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial z_0} = -2 e A_{z0} - \frac{\partial S}{\partial z_0}. \quad (42)$$

Nach (38) haben wir daher auf E_0 , wenn wir das Glied, welches \hbar nicht im Nenner enthält, gegenüber dem angeschriebenen als verschwindend klein vernachlässigen:

$$\frac{\partial G}{\partial z_0} = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\partial S}{\partial z_0} - \frac{\partial \bar{S}}{\partial z_0} \right) a e^{-iS/\hbar}. \quad (43)$$

Mit (43) ergibt sich aus (22)

$$\psi(P_1) = -\frac{2i}{\hbar} \int_{E_1} \left(e A_{z0} + \frac{\partial S}{\partial z_0} \right) a e^{-iS(P_1, P_0)/\hbar} \psi(P_0) df_0. \quad (44)$$

Die Funktion $S(P_1, P_0)$ ist dabei durch

$$S(P_1, P_0) = \int_{P_1}^{P_0} [m v - e (\mathcal{A} \cdot \hat{s})] ds \quad (45)$$

definieren. Vertauscht man P_1 mit P_0 , so ändert S das Vorzeichen. Definieren wir also in der üblichen Weise S durch $S(P_0, P)$:

$$S(P_0, P) = \int_{P_0}^P [m v - e \mathcal{A}(\mathbf{s})] ds, \quad (46)$$

so geht (44) über in

$$\psi(P) = \frac{2}{i\hbar} \int_{E_0} \left(e A_{z0} - \frac{\partial S}{\partial z_0} \right) a e^{\frac{i}{\hbar} S} \psi(P_0) df_0. \quad (47)$$

Den Aufpunkt haben wir nunmehr mit P , seine Koordinaten mit (x, y, z) bezeichnet.

Die Bestimmung von a gelingt leicht, wenn die zugehörigen klassischen Bahnen, also in letzter Linie die Wirkungsfunktion S gegeben sind. Wir wählen ein von P ausgehendes Elektronenbündel mit der Öffnung $d\Omega$. Diese aus Elektronenbahnen gebildete kegelförmige Stromröhre schneidet aus der Dingebene E_0 das Flächenelement $df_0 = dx_0 dy_0$ heraus (Abb. 2). Wenn wir um P eine kleine Kugel vom Radius r schlagen, ergibt sich aus dem Erhaltungssatz der Teilchenzahl

$$a^2 v \cdot r^2 d\Omega = a^2(P_0) v_{z0} df_0. \quad (48)$$

Hierbei bedeutet a den Wert auf der Oberfläche der kleinen, P umschließenden Kugel. Dieser Wert ist durch (36) gegeben. Damit ergibt sich

$$[4\pi a(P_0)]^2 = \frac{v}{v_{z0}} \frac{d\Omega}{df_0}. \quad (49)$$

$d\Omega/df_0$ kann nun in folgender Weise durch die Ableitungen von S ausgedrückt werden. Zunächst hat man

$$d\Omega = \frac{1}{\gamma} d\alpha d\beta = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x_0, y_0)} df_0, \quad (50)$$

also mit $v\gamma = v_{z0}$

$$[4\pi a(P_0)]^2 = \frac{(mv)^2}{m v_z m v_{z0}} \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x_0, y_0)}. \quad (51)$$

Wegen $mv\mathbf{s} = \text{grad } S + e\mathcal{A}$ ergibt dies

$$a(P_0) = \frac{1}{4\pi} \left(e A_z + \frac{\partial S}{\partial z} \right)^{-1} \left(e A_{z0} - \frac{\partial S}{\partial z_0} \right)^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0} & \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y_0} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x_0} & \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial y_0} \end{vmatrix}. \quad (52)$$

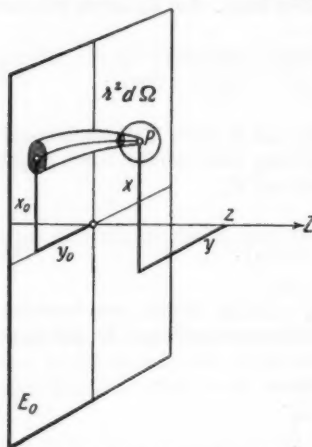


Abb. 2. Zur Berechnung der Amplitude der Greenschen Funktion

Die Wellenfunktion $\psi(P)$ in einer beliebigen Einstellebene läßt sich damit aus der Wellenfunktion $\psi(P_0)$ in der Dingebene nach (52) und (47) auf folgende Weise berechnen:

$$\psi(P) = \frac{1}{2\pi i \hbar} \int_{E_0} \psi(P_0) \left(\frac{e A z_0 - \frac{\partial S}{\partial z_0}}{e A z + \frac{\partial S}{\partial z}} \right)^{\dagger} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0} & \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y_0} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x_0} & \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial y_0} \end{vmatrix} e^{i S/\hbar} dx_0 dy_0. \quad (53)$$

Man überzeugt sich leicht, daß im feldfreien Raum (53) in

$$\psi(P) = \frac{1}{i \lambda} \int_{E_0} \frac{1}{r} \psi(P_0) e^{2\pi i r/\lambda_1} \cos \vartheta dx_0 dy_0; \quad \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{p_1}{\hbar} \quad (54)$$

übergeht, die im wesentlichen mit der Kirchhoffschen Formel übereinstimmt. Dabei bedeutet ϑ den Neigungswinkel des Radiusvektors vom Aufpunkt zum Integrationspunkt gegenüber der optischen Achse.

Wie aus Abb. 2 hervorgeht, verlangen unsere Überlegungen, daß jeder Strahlrichtung (α, β) im Aufpunkt P ein anderer Punkt (x_0, y_0) in der Objektebene entspricht. Wir müssen also zunächst den Fall ausschließen, daß die Dingebene zur Einstellebene konjugiert ist. In diesem Fall würde nämlich die Determinante in (53) unendlich. Für den paraxialen Fall haben wir bereits festgestellt, daß diese Schwierigkeit durch Grenzübergang überwunden werden kann. Auch im allgemeinen Falle kann man die Wellenfunktion in der Gaußschen Bildebene nach unserer Formel (53) im Prinzip berechnen. Man hat dazu zunächst die Wellenfunktion $\psi(z_B)$ in einer nichtkonjugierten Zwischenebene $z = z_B$ zu ermitteln und durch neuerliche Anwendung der Formel (53) daraus die Wellenfunktion $\psi(z_B)$ in der Gaußschen Bildebene zu bestimmen. Ein zum paraxialen Fall analoger Grenzübergang müßte zum gleichen Ergebnis führen.

Die Wellenfunktion im Seidelschen Gebiet

Die Formel (53) gibt uns ganz allgemein an, wie die in der Dingebene vorgegebene Wellenfunktion durch das elektrisch-magnetische Abbildungsfeld modifiziert wird. Sie stellt — kurz gesagt — den Einfluß der Elektronenlinsen auf die Wellenfunktion dar. Für die Elektronenoptik genügt es, sich auf das Seidelsche Gebiet zu beschränken. Hierauf haben wir sonach die Formel (53) zu spezialisieren. Wir müssen also den Ausdruck für das Eikonale S (Wirkungsfunktion) bis zu Gliedern vierter Ordnung entwickeln. Wenn wir unsere Aufpunktskoordinaten x, y, z mit den Koordinaten x_B, y_B, z_B in der Blende ebene, die man zur Bestimmung des Eikonals im Blenden-System verwendet, können wir unmittelbar bereits anderweitig¹⁾ entwickelte Formeln benutzen. Mit den Abkürzungen

$$\varrho = x^2 + y^2, \quad \kappa = x x_0 + y y_0, \quad R = x_0^2 + y_0^2, \quad \sigma = x_0 y - y_0 x \quad (55)$$

gilt

$$S(z_0, z_B) = S_0 + \frac{1}{2} p_B a_1 \varrho + p_B a_2 \kappa + \frac{1}{2} p_B a_3 R - p_B \left\{ \frac{1}{4} A_1 R^2 + E_1 R \kappa + C_1 \kappa^2 + \frac{1}{2} D_1 R \varrho + E_1 \varrho \kappa + \frac{1}{4} B_1 \varrho^2 + e_1 R \sigma + c_1 \kappa \sigma + f_1 \varrho \sigma \right\}. \quad (56)$$

¹⁾ Vgl. z. B. die Entwicklungen in W. Glaser, „Grundlagen der Elektronenoptik“, Wien 1952, XVII.

Die hier auftretenden Koeffizienten $a_1 \dots f_1$ sind aus den durch die „Blenden-ebene“ $z = z_B$ folgendermaßen festgelegten paraxialen Bahnen $g(z)$ und $h(z)$

$$\begin{aligned} g(z_0) &= 1; & h(z_0) &= 0 \\ g(z_B) &= 1; & h(z_B) &= 1 \end{aligned} \quad (57)$$

zu berechnen. Da hierdurch die Koordinate z_B in sehr undurchsichtiger Weise eingeht, wollen wir daher die für das blendenfreie System charakteristischen Bahnen $s(z)$ und $t(z)$ nach (1.56) einführen. Es gilt dann

$$g = s - \mu_0 t; \quad h = \nu_0 t; \quad \mu_0 = s(z_B)/t(z_B), \quad \nu_0 = 1/t(z_B) \quad (58)$$

und — wenn für z_B wieder z geschrieben wird,

$$a_1 = t'(z)/t(z), \quad a_2 = -p_0/p \, t'(z), \quad a_3 = p_0 s(z)/p \, t(z). \quad (59)$$

Die Gl. (46) geht über in

$$S(z_0, z) = S_0 + \frac{1}{2t(z)} [p \, t'(z) - 2p_0 x + p_0 s(z) R] - p \left[\frac{1}{4} A_1 R^2 + \dots \right]. \quad (60)$$

Die Koeffizienten $A_1 \dots f_1$ können nun folgendermaßen durch die paraxialen Bahnen $s(z), t(z)$ ausgedrückt werden:

zuerst mögen die Koeffizienten $A_0 \dots f_0$ eingeführt werden:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \int_{z_0}^z (L s^4 + 2 M s^2 s'^2 + N s'^4) dz \\ C_0 &= \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \int_{z_0}^z (L s^2 t^2 + M s t s' t' + N s'^2 t'^2 - \Phi_0 k) dz \\ D_0 &= \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \int_{z_0}^z (L s^2 t^2 + M (s^2 t'^2 + s'^2 t^2) + N s'^2 t'^2 + 2 \Phi_0 k) dz \\ E_0 &= \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \int_{z_0}^z (L s^3 t + M s s' (t s)' + N s'^3 t') dz \\ F_0 &= \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \int_{z_0}^z (L s t^3 + M t t' (t s)' + N s' t'^2) dz \\ B_0 &= \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \int_{z_0}^z (L t^4 + 2 M t^2 t'^2 + N t'^4) dz \\ e_0 &= \sqrt{\frac{\Phi_0}{\Phi}} \int_{z_0}^z (P s^2 + Q s'^2) dz \\ c_0 &= 2 \sqrt{\frac{\Phi_0}{\Phi}} \int_{z_0}^z (P s t + Q s' t') dz \\ f_0 &= \sqrt{\frac{\Phi_0}{\Phi}} \int_{z_0}^z (P s^2 + Q t'^2) dz. \end{aligned} \quad (61)$$

Blenden-
und $h(z)$

Durch Berücksichtigung von (58) und der bekannten Ausdrücke für $A_1 \cdot f_1$ erhalten wir die Umrechnungsbeziehungen:

$$\begin{aligned}
 (57) \quad A_1 &= A_0 - 4\mu_0 E_0 + 4\mu_0^2 C_0 + 2\mu_0^3 D_0 - 4\mu_0^3 F_0 + \mu_0^4 B_0 \\
 E_1 &= v_0 (E_0 - 2\mu_0 C_0 - \mu_0 D_0 + 3\mu_0^2 F_0 - \mu_0^3 B_0) \\
 C_1 &= v_0^2 (C_0 - 2\mu_0 F_0 + \mu_0^2 B_0), \quad e_1 = v_0 (e_0 - \mu_0 c_0 + \mu_0^2 f_0) \\
 D_1 &= v_0^2 (D_0 - 2\mu_0 F_0 + \mu_0^2 B_0) \quad c_1 = v_0^2 (c_0 - 2\mu_0 f_0) \\
 (58) \quad F_1 &= v_0^3 (F_0 - \mu_0 B_0) \quad f_1 = v_0^3 f_0 \\
 B_1 &= v_0^4 B_0.
 \end{aligned} \tag{62}$$

(59)
(60)
axialen

Die für den paraxialen Bereich entwickelten Formeln enthielten das Eikonal im Exponenten bis zu Gliedern zweiter Ordnung einschließlich, für a trat eine allein von z und z_0 , nicht aber von den x_0, y_0, x, y abhängige Funktion. Man wird vermuten, daß es sich dabei um die nach dem ersten Glied abgebrochene Entwicklung von (53) handelt, was sich auch weiter unten bestätigen wird. Es ist daher konsequent, in (53) den vor der e -Potenz stehenden Faktor bis auf Glieder zweiter Ordnung zu bestimmen, wenn man das Eikonal in der e -Potenz bis auf Glieder vierter Ordnung entwickelt.

Die Ableitungen $\frac{\partial S}{\partial z}$ und $\frac{\partial S}{\partial z_0}$ bestimmt man am besten aus der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung. Wenn wir das rotationsymmetrische elektromagnetische Feld

$$A_X = -\frac{1}{2} B_z Y, \quad A_Y = \frac{1}{2} B_z X, \quad A_z = 0, \quad \varphi = \Phi - \frac{1}{4} \Phi'' r^2 \tag{63}$$

dz

einsetzen, erhalten wir bis zu Gliedern zweiter Ordnung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial X} - \frac{e}{2} B_z Y\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y} + \frac{e}{2} B_z X\right)^2 - 2em\Phi + \frac{em}{2}\Phi''(X^2 + Y^2) = 0. \tag{64}$$

(61) Da $\frac{\partial S}{\partial z}$ bis auf Glieder zweiter Ordnung mit dem Impuls $p = \sqrt{2em\Phi}$ längs der Achse übereinstimmt, können wir in dieser Näherung schreiben:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - p^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial z} - p\right)\left(\frac{\partial S}{\partial z} + p\right) = 2\left(\frac{\partial S}{\partial z} - p\right)p. \tag{65}$$

Damit erhält man aus (64)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial z} &= p - \frac{1}{2p} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y}\right)^2 \right] - \frac{e}{2p} B_z \left(X \frac{\partial S}{\partial Y} - Y \frac{\partial S}{\partial X} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{e^2}{8p} B_z^2 + \frac{em}{4p} \Phi'' \right) (X^2 + Y^2).
 \end{aligned} \tag{66}$$

Wie man auf Grund der Transformationsbeziehungen (I, 17) leicht nachweist, bestehen zwischen den auf das gedrehte und ungedrehte System bezogenen Größen

die Beziehungen

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= x^2 + y^2; & \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 \\ X \frac{\partial S}{\partial Y} - Y \frac{\partial S}{\partial X} &= x \frac{\partial S}{\partial y} - y \frac{\partial S}{\partial x}. \end{aligned} \quad (67)$$

Es ist daher

$$\frac{\partial S}{\partial z} = p - \frac{1}{2p} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 \right] - \frac{e B_z}{2p} \left(x \frac{\partial S}{\partial y} - y \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \left(\frac{em}{4p} \Phi'' + \frac{e^2}{8p} B_z^2 \right) (x^2 + y^2). \quad (68)$$

Wenn man in (60) nach (59) einsetzt, erhält man

$$S(z_0, z) = S_0 + \frac{1}{2t} [p t' (x^2 + y^2) - 2 p_0 (x x_0 + y y_0) + p_0 s (x_0^2 + y_0^2)] \quad (69)$$

Mit diesem Ausdruck ergibt sich für (68)

$$\frac{\partial S}{\partial z} = p - \left(\frac{em}{4p} \Phi'' + \frac{e^2 B_z^2}{8p} + \frac{p t'^2}{2t^2} \right) \varrho + p_0 \frac{t'}{t} x - \frac{p_0^2}{2p t^2} R + \frac{e p_0 B_z}{2p t} \sigma. \quad (70)$$

Faßt man $S(P_0, P)$ als Funktion des Anfangspunktes P_0 auf, so genügt diese Funktion der Eikonalgleichung, die durch Richtungsumkehr der magnetischen Feldstärken aus derjenigen für $S(P)$ entsteht:

$$(\text{grad } S)^2 - 2e \mathcal{H} \text{ grad } S + e^2 \mathcal{H}^2 - 2em\varphi = 0. \quad (71)$$

In unserer Näherung erhalten wir

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial z_0} &= p_0 - \frac{1}{2p_0} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_0}\right)^2 \right] + \frac{e B_{z0}}{2p_0} \left(x_0 \frac{\partial S}{\partial y_0} - y_0 \frac{\partial S}{\partial x_0} \right) \\ &\quad - \left(\frac{em}{4p_0} \Phi'' + \frac{e^2}{8p_0} B_{z0}^2 \right) (x_0^2 + y_0^2). \end{aligned} \quad (72)$$

Auf Grund von (69) folgt

$$-\frac{\partial S}{\partial z_0} = p_0 - \frac{p_0}{2t^2} \varrho + \frac{p_0^2}{t^2} x - \left(\frac{p_0^2}{2t^2} + \frac{em}{4p_0} \Phi'' + \frac{e^2 B_{z0}^2}{8p_0} \right) R - \frac{e B_{z0}}{2t} \sigma. \quad (73)$$

Um auch die Determinante in (53) bis zu Gliedern zweiter Ordnung einschließlich zu berechnen, bezeichnen wir in (56) die Glieder vierter Ordnung mit S_4 und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0} &= p a_1 + \frac{\partial^2 S_4}{\partial x \partial x_0}; & \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y_0} &= \frac{\partial^2 S_4}{\partial x \partial y_0} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x_0} &= \frac{\partial^2 S_4}{\partial y \partial x_0}; & \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial y_0} &= p a_1 + \frac{\partial^2 S_4}{\partial y \partial y_0}. \end{aligned} \quad (74)$$

Die durch zweimalige Differentiation von S_4 entstehenden Glieder sind von zweiter Ordnung. Es ergibt sich

$$(67) \quad \frac{\partial(m v_x, m v_y)}{\partial(x_0, y_0)} = \left(p a_2 + \frac{\partial^2 S_4}{\partial x \partial x_0} \right) \left(p a_2 + \frac{\partial^2 S_4}{\partial y \partial y_0} \right) = p^2 a_2^2 + p a_2 \left(\frac{\partial^2 S_4}{\partial x \partial x_0} + \frac{\partial^2 S_4}{\partial y \partial y_0} \right). \quad (75)$$

Wir erhalten die zweiten Ableitungen aus der Gl. (56) zu

$$S_{xx_0} S_{yy_0} - S_{yx_0} S_{xy_0} = p^2 a_2 - p a_2 [4 F_1 \varrho + 2(D_1 + 3 C_1) \kappa + 2 E_1 R + 2 c_1 \sigma]. \quad (76)$$

Wenn man für a_2 aus (59) einsetzt, erhält man

$$(S_{xx_0} S_{yy_0} - S_{yx_0} S_{xy_0})^{1/2} = \frac{p_0}{t} + p [2 F_1 \varrho + (D_1 + 3 C_1) \kappa + 2 E_1 R + 2 c_1 \sigma]. \quad (77)$$

Mit (70), (73) und (77) ergibt sich so endgültig für $\psi(P)$

$$\psi(P) = \frac{1}{2 \pi i \hbar} \sqrt{\frac{p_0}{p}} \int_{E_0} \left(\frac{p_0}{t} + A \varrho + B \kappa + C R + D \sigma \right) e^{i S/\hbar} \psi(P_0) df_0, \quad (78)$$

wobei A, B, C und D folgende Funktionen von z und z_0 bedeuten

$$\begin{aligned} A &= 2 p F_1 + \frac{p_0}{4 t} \left(\frac{t'^2 - 1}{t^2} + \frac{e m}{2 p^2} \Phi'' + \frac{e^2 B_z^2}{4 p^2} \right), \\ B &= p (D_1 + 3 C_1) - \frac{p_0}{2 p t^2} (p_0 t' - p s), \\ C &= 2 p E_1 - \frac{p_0}{4 t} \left(\frac{p^2 s^2 - p_0^2}{p^2 t^2} + \frac{e m}{2 p_0^2} \Phi_0'' + \frac{e^2 B_{z0}^2}{4 p_0^2} \right), \\ D &= 2 p c_1 - \frac{1}{4 p^2 t^2} (e B_{z0} p^2 + e B_z p_0^2). \end{aligned} \quad (79)$$

Die Funktion S ist durch (56) gegeben.

Wenn man sich auf das paraxiale Gebiet beschränkt, also im Exponenten bis zu Gliedern zweiter Ordnung, in den übrigen Termen nur bis zur nullten Ordnung geht, so entsteht wieder die für den paraxialen Bereich abgeleitete Formel I (67), aus der wir die Existenz einer objektgetreuen Abbildung folgern konnten. Bei der hier gegebenen Ableitung, die grundsätzlich für beliebigen Achsenabstand gilt, ist die Bedingung

$$\frac{\text{div grad } a}{a} \ll \frac{2 m e \varphi}{\hbar^2} \quad (80)$$

für die Greensche Funktion in entsprechender Entfernung vom Konvergenzpunkt angenommen worden; für die Wellenfunktion selbst brauchte sie jedoch nirgends vorausgesetzt werden.

Die im ersten Teil gegebenen Herleitung war von der Bedingung (80) unabhängig, an Stelle dessen wurde die Voraussetzung der Achsennähe benutzt. Die mit der Heisenbergschen Unschärferelation zusammenhängende Gültigkeitsgrenze der

gleichzeitigen Annahme von flacher und achsennaher Elektronenstrahlung wurde an dieser Stelle ausführlich besprochen.

Mit der Aufstellung der Formel (78) ist die Berechnung des Einflusses des Abbildungsfelds auf die Wellenfunktion grundsätzlich gelöst. Was zu tun bleibt, ist die explizite Auswertung für vorgegebene elektrisch-magnetische Abbildungsfelder und gegebene, das Objekt charakterisierende Funktion $\psi(P_0)$, um so die tatsächliche Verteilung der Elektronenstromdichte in der gewählten Einstellenebene zu erhalten.

Wien, Institut für angewandte Physik der Technischen Hochschule;
Berlin, Abteilung für Elektronenoptik der Siemens-Halske A.G.

(Bei der Redaktion eingegangen am 2. Dezember 1952.)

ng wurde

des Ab-
n bleibt,
bildungs-
n so die
Einstell-

Über die Halbleitereigenschaften des Kupferoxyduls. VI

Die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit bei Temperaturen zwischen $+20^{\circ}\text{C}$ und -190°C ¹⁾

Von G. Blankenburg und G. Schubart

(Mit 10 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Wenn der Logarithmus der Leitfähigkeit von Cu_2O über der reziproken absoluten Temperatur ($+20^{\circ}\text{C}$ bis -190°C) aufgetragen wird, erhält man eine Abhängigkeit, die am besten durch Aneinanderreihen von Geradenstücken interpoliert werden kann. Die Temperaturen, bei denen die Knicke, an denen diese Geradenstücke zusammengesetzt sind, auftreten, zeigen gewisse Beziehungen zur Vorbehandlung der Probe. An einem Teil der Ergebnisse läßt sich zeigen, wie die „Ablösearbeiten“ c und die Werte für κ_0 von dem Sauerstoffdruck einer vorhergehenden Temperung abhängen.

1. Einleitung und Fragestellung

Nach verschiedenen theoretischen Ansätzen²⁾ gilt für die spezifische elektrische Leitfähigkeit von Halbleitern ein Ausdruck der Form

$$\kappa = \kappa_0(T) \cdot \exp\left(-\frac{c}{k \cdot T}\right). \quad (1)$$

Hierin ist k die Boltzmannsche Konstante, T die absolute Temperatur und c ein Maß für die thermische Ablösearbeit ε , d. h. für diejenige Energie, die erforderlich ist, um im Halbleiter durch thermische Anregung ein Elektron derart in eine höhere Energiestufe zu heben, daß durch diesen Übergang die Leitfähigkeit erhöht wird. Die Theorien führen entweder zu $c = \varepsilon$ oder zu $c = \frac{\varepsilon}{2}$ ³⁾. Bei der nachfolgenden Mitteilung wollen wir, wie früher⁴⁾, nicht von der Ablösearbeit ε [eV], sondern von der „Ablösearbeit“ c [eV] schlechthin sprechen. Es bleibt dann der späteren Deutung überlassen, zu ε entweder durch Gleichsetzen mit c oder durch Verdoppeln der für c angegebenen Werte zu gelangen.

¹⁾ Teilergebnisse aus zwei Diplomarbeiten der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Vgl. V. Mitteilung: Ann. Physik (6) 10, 241 (1952). (Dort auch Hinweise auf die früheren Mitteilungen.)

²⁾ Vgl. z. B.: J. Koenigsberger u. O. Reichenheim, Physik. Z. 30, 839 (1906); A. H. Wilson, Proc. Roy. Soc. London (A) 133, 458 (1931); 134, 277 (1931); H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle (Berlin 1936), S. 79–82 und 224ff.; N. F. Mott u. R. W. Gurney, Electronic Processes in Ionic Crystals (Oxford 1940), S. 152ff.

³⁾ N. F. Mott u. R. W. Gurney, Electronic Processes in Ionic Crystals, S. 159.

⁴⁾ O. Böttger, Ann. Physik (6) 10, 232 (1952).

Durch Logarithmieren von (1) erhält man

$$\ln \kappa = -\frac{c}{k} \cdot \frac{1}{T} + \ln \kappa_0. \quad (2)$$

Der Einfachheit halber gehen wir zu dekadischen Logarithmen über und schreiben

$$\log \kappa = -\frac{M \cdot c}{k} \cdot \frac{1}{T} + \log \kappa_0. \quad (3)$$

(M = Modul der dekadischen Logarithmen.)

Wenn sich während der Messung von κ in Abhängigkeit von T die Störstellenkonzentration des Halbleiters nicht ändert, kann man, und darin stimmen alle Theorien trotz verschiedener Ergebnisse überein, die Temperaturabhängigkeit von κ_0 gegenüber der der Exponentialfunktion vernachlässigen. Dann müßte sich, wenn man den Logarithmus der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit gegen die reziproke absolute Temperatur aufträgt, eine Gerade ergeben, aus deren Neigung sich die „Ablösearbeit“ c berechnen läßt.

Die Theorien lassen aber auch einige Möglichkeiten zu Abweichungen von der Geradlinigkeit offen³⁾, sei es, daß aus verschiedenen Gründen mehrere Ablösearbeiten ε_λ existieren, so daß man statt (1) schreiben muß

$$\kappa = \sum_{\lambda=1}^n \kappa_{\lambda 0} \cdot \exp\left(-\frac{c_\lambda}{k \cdot T}\right), \quad (4)$$

oder daß für verschiedene Temperaturbereiche teils $c_1 = \varepsilon$, teils $c_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ gilt, was ebenfalls zu einem Ausdruck wie (4) führt, oder daß Temperaturabhängigkeiten von ε oder von κ nicht vernachlässigt werden können.

Bei den meisten Halbleitern ist die Geradlinigkeit der Funktion $\log \kappa$ über $\frac{1}{T}$ wenigstens innerhalb gewisser Temperaturbereiche nachgewiesen. Vielfach hat man aber auch Abweichungen festgestellt, die z. T. auf obengenannte Bedingungen zurückgeführt werden können.

Am Kupferoxydul fand zum ersten Male W. Vogt⁴⁾ bei einer Reihe von Proben ein Abweichen von der Geradlinigkeit. Er bestimmte die „Ablösearbeit“ c für Temperaturen unter 25° C zu etwa 0,3 eV, während sie für höhere Temperaturen geringer war und in ihrem Werte für die verschiedenen Proben stark streute. Wenn man von einer nennenswerten Trägheit in der Einstellung des Leitfähigkeitswertes nach Überschreiten der etwa bei 25° C liegenden Übergangstemperatur absieht, fand W. Vogt nach höheren Temperaturen (bis etwa +70° C) und nach tieferen Temperaturen (bis etwa -70° C) je eine gut reproduzierbare Gerade, so daß in der Nähe der Zimmertemperatur ein Knick in der $\log \kappa$ -Geraden auftritt.

Später zeigte E. Engelhard⁵⁾, daß dieser Knick bei der gleichen Temperatur vielfach auch in der Abhängigkeit des Logarithmus der Hallkonstanten von der reziproken Temperatur beobachtet werden konnte. Darüber hinaus fand er einen weiteren Knick sowohl der Leitfähigkeits- als auch der Hallkonstantenkurve in der Gegend von etwa -70° C. Für diesen Knick konnte keine Trägheit nachgewiesen werden, und sein Temperaturwert schwankte von Probe zu Probe. Oberhalb dieser Temperatur berechnete E. Engelhard aus seinen Meßergebnissen nach Gl. (1) etwa $c = 0,35$ eV, unterhalb etwa $c = 0,27$ eV.

³⁾ W. Vogt, Ann. Physik (5) 7, 183 (1930).

⁵⁾ E. Engelhard, Ann. Physik (5) 17, 501 (1933).

Wir halten es für zweckmäßig, daß man vor dem Versuch einer Deutung der Erscheinung den Beobachtungsbereich nach tieferen Temperaturen hin ausdehnt. Deshalb haben die beiden Verfasser unabhängig voneinander Messungen der Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit des Kupferoxyduls zwischen Zimmertemperatur und der Temperatur des flüssigen Stickstoffs durchgeführt, und die beiden Meßreihen werden nachfolgend, wie es auch schon in der III. Mitteilung⁷⁾ geschah, durch die Buchstaben *GB* und *GS* unterschieden.

Die Proben wurden durch Tempern bei vermindertem Sauerstoffdruck im Stabilitätsgebiet⁸⁾ des Cu_2O (vgl. I. Mitteilung⁹⁾) vorbehandelt; über die Ergebnisse der Untersuchungen hinsichtlich der Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Sauerstoffdruck der vorhergehenden Temperung berichtete bereits die III. Mitteilung⁷⁾. Ferner hat der eine von uns über einen Teil seiner Ergebnisse im Rahmen einer Tagung eine vorläufige Mitteilung gegeben¹⁰⁾.

2. Das Versuchsmaterial und seine Behandlung

Über die Herkunft und die Qualität des Kupfers, die Oxydation, die Temperung und die Abkühlung bringt schon die I.⁹⁾ und die III. Mitteilung⁷⁾ alles Wissenswerte. In der Hauptsache unterscheiden sich die beiden Meßreihen *GB* und *GS* durch die Abkühlungsmethode. Entweder wurden die Proben nach der Temperung in der Zimmerluft (*GB*) oder bei aufrechterhaltenem Temperungsdruck durch Übergießen des die Proben enthaltenden Quarzrohres mit Wasser abgekühlt (*GS*).

3. Die Meßmethode

Auch über die Anordnung zur Leitfähigkeitsmessung ist schon früher⁷⁾ berichtet worden. Wir wiederholen kurz: Zur Bestimmung der Widerstände $< 10^7$ Ohm diente eine Brückenmethode, für höhere Widerstände das Verfahren der Stromspannungsmessung. Dazu mußten zur Messung der verschiedenen Größenordnungen der Widerstände mit sinkender Temperatur steigende Spannungen an die Probe gelegt werden. Durch wiederholte Versuche wurde sichergestellt, daß die gemessenen Widerstandswerte wenigstens im Rahmen der durch die Messung und durch die graphische Darstellung begrenzten Genauigkeit weder von der Meßmethode noch von der an der Probe liegenden Spannung abhängig waren.

4. Die Meßergebnisse der Meßreihe GB

a) Die Abhängigkeit der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit von der Temperatur

Trägt man die Meßergebnisse in der Darstellung $\log \kappa$ über $\frac{1}{T}$ auf, dann sollte sich nach Gl. (3) eine Gerade ergeben. Dagegen zeigt Abb. 1 am Beispiel dreier Proben der Meßreihe *GB*, daß man die Abhängigkeit durch einen Polygonzug darstellen muß.

⁷⁾ G. Blankenburg, C. Fritzsche u. G. Schubart, Ann. Physik (6) 10, 217 (1952).

⁸⁾ Anstatt des in den früheren Mitteilungen von uns für diesen Begriff verwendeten Wortes „Existenzgebiet“ wollen wir in Zukunft besser „Stabilitätsgebiet“ sagen, denn außerhalb dieses Gebietes kann Cu_2O zwar durchaus existieren, es ist aber dort nicht stabil.

⁹⁾ G. Blankenburg u. K. Kassel, Ann. Physik (6) 10, 201 (1952).

¹⁰⁾ G. Blankenburg u. K. Kassel, Forsch. u. Fortsch. 26, 3. Sdh. 33 (1950).

Die Untersuchungen dieser Meßreihe erfolgten an 44 Proben. Davon sind die Ergebnisse von 43 Proben zur Auswertung geeignet, während eine einzelne Probe derart ausgefallene (hohe) Leitfähigkeit zeigte, daß es berechtigt erschien, sie unbeachtet zu lassen.

Der bei Zimmertemperatur gefundene Vogtsche Knickpunkt (I), auf dessen genauere Bestimmung hier kein Wert gelegt wurde, machte sich in 39 Fällen dadurch bemerkbar, daß der bei etwa $+20^\circ\text{C}$ gemessene Leitfähigkeitswert (vgl. Abb. 1) oberhalb der Geraden lag, die durch die zu tiefen Temperaturen gehörenden Meßpunkte gelegt wird. In drei Fällen kann eine Abweichung nicht erkannt

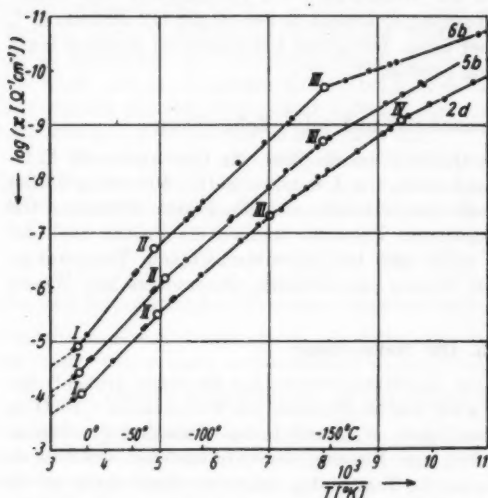


Abb. 1. 3 Beispiele für die in Meßreihe GB gefundene Abhängigkeit der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit κ von der Temperatur T . Die 3 angegebenen Proben unterscheiden sich in der Vorbehandlung durch den Sauerstoffdruck der Temperatur bei 960°C . Probe 2d: $p_{\text{O}_2} = 1 \cdot 10^{-5}$ Torr (außerhalb des Stabilitätsgebietes³⁾); Probe 5b: $p_{\text{O}_2} = 9 \cdot 10^{-1}$ Torr; Probe 6b: $p_{\text{O}_2} = 27$ Torr

Die Änderung der Neigung erfolgte stets im gleichen Sinne wie beim Engelhardtschen Knick.

An 29 Proben traten sowohl Knick II als auch Knick III auf, an 5 Proben war in dem Bereich zwischen 0°C und -160°C nur II zu bemerken, an 3 Proben nur III und an 6 Proben keiner von beiden. Außerdem waren bei 5 Proben mehr oder weniger deutliche Anzeichen dafür vorhanden, daß in der Gegend von -170°C ein weiterer Knickpunkt (IV) liegt. Ein Beispiel dafür gibt die Probe 2d der Abb. 1. Eine Zuordnung des Auftretens oder Nichtauftretens irgendeines Knickes zum Temperungsdruck oder zu anderen Vorbehandlungsbedingungen war nicht festzustellen. Dagegen erfolgt die Änderung der Steigung bei den Knicken II, III und IV, wie aus Abb. 1 ersichtlich ist, stets in demselben Sinne, d. h. die Steigung nimmt im Gegensatz zu Knick I mit sinkender Temperatur ab.

werden, bei einer Probe befand sich der Punkt auf der anderen Seite der Geraden. Daraus geht hervor, daß bei den Proben der Meßreihe GB der Vogtsche²⁾ Knick (I) meistens nicht bei 25°C , sondern etwa zwischen $+15^\circ\text{C}$ und $+20^\circ\text{C}$ liegt.

Der Engelhardtsche³⁾ Knick (II), etwa zwischen -70°C und -80°C , kommt in unseren Kurven 34mal vor, während er in 9 Fällen nicht auftritt.

Unsere Messungen stellten weiterhin bei tieferer Temperatur eine sprunghafte Änderung der Neigung der $\log \kappa$ -Geraden über $\frac{1}{T}$

fest (III), wobei der zugehörige Temperaturwert gewöhnlich zwischen -140°C und -150°C schwankt. Dieser neue Knick ließ sich in 32 Fällen beobachten.

Der Feststellung, daß die in Abb. 1 angegebene Abhängigkeit am besten durch einen Polygonzug dargestellt werden kann, wird man um so mehr Glauben schenken, je genauer die einzelnen Meßwerte reproduzierbar und je zahlreicher sie sind. Während die Messungen im allgemeinen bei sehr langsam sinkender Temperatur erfolgten, wurde bei jeder Probe die Richtung der Temperaturänderung einige Male vorübergehend umgekehrt. Die Abweichungen der so gewonnenen $\log \kappa$ -Werte von den bei sinkender Temperatur gemessenen Werten überstiegen selten 1%, meistens waren sie erheblich kleiner. Den in Abb. 1 wiedergegebenen Kurven liegen etwa 20 bis 35 Meßpunkte zugrunde¹¹⁾, während eine früher schon einmal veröffentlichte Kurve¹⁰⁾ der gleichen Meßreihe durch etwa 100 Meßpunkte festgelegt ist. Alle Ergebnisse zeigen deutlich, daß die Meßpunkte durch einen Polygonzug besser angenähert werden als durch eine Kurve mit etwa gleichmäßiger Krümmung.

b) Die Temperaturlage der Knicke

Man mag es zunächst für denkbar halten, daß die Knicke in den Kurven auf eine fehlerhafte Eichung der Meßeinrichtung oder auf eine Spannungsabhängigkeit des Widerstandes der Proben zurückgeführt werden könnten. Wenn die Temperaturmessung in diesem Sinne gefälscht und die Knicke dadurch hervorgerufen wären, dürften die Knickpunkte nur bei ganz bestimmten Temperaturen auftreten. Aus Abb. 1 und aus Tabelle 1 sieht man jedoch, daß die Lage der Knickpunkte nicht an genaue Temperaturwerte gebunden ist. Da die Proben alle annähernd gleichgroß waren, müßte ein Fehler der solche Knicke verursacht, in der Widerstandsmessung eine Häufung der Knicke bei gewissen Werten der spezifischen Leitfähigkeit ergeben. Auch das trifft, wie Abb. 1 schon an wenigen Beispielen erläutert, nicht zu. Da die Änderungen der bei der Messung an der Probe liegenden Spannung nur nach Erreichen ganz bestimmter Widerstandswerte erfolgte, ist damit auch der Verdacht, daß eine Spannungsabhängigkeit des Widerstandes verantwortlich zu machen ist, hinfällig.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Knickpunkte nicht gleichmäßig über die ganze Temperaturskala verteilt sind, sondern daß eine Häufung in ge-

Tabelle 1
Die Lage der Knickpunkte in den Kurven $\log \kappa$ über $1/T$ der Meßreihe GB

P_{O_2} [Torr] =	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-1}$	13	27
\bar{T}_{KII} [°K]	200	186	204,3	202	197,7	192,5	195,3
$\Delta_{\max} T_{KII}$	10	13	13	15	10	7,5	10
n_{KII}	3/6	5/6	5/8	4/6	6/6	6/6	5/5
\bar{T}_{KIII} [°K]	128	120,2	124,4	125,3	129,3	123,8	137,1
$\Delta_{\max} T_{KIII}$	15	8	13	9	8	9	12
n_{KIII}	4/6	3/6	7/8	2/6	5/6	6/6	5/5

\bar{T}_K = Mittelwert der Lage des Knickes K über alle Proben, die bei dem angegebenen Druck getempert worden sind,

$\Delta_{\max} T_K$ = Maximale Abweichung der beobachteten Einzelwerte vom Mittelwert,

n_K = Zahl der Proben, bei denen der Knick K beobachtet wurde, über der Zahl der bei dem betreffenden Druck getemperten Proben.

¹¹⁾ In Abb. 1 sind nicht alle Meßpunkte zu erkennen, da einige sehr dicht beieinander liegen.

wissen Bereichen eintritt. In Abb. 2 ist eine Verteilungskurve von Knickpunkten, gewonnen aus den Ergebnissen der Meßreihe *GB*, angegeben.

Der Knick I wurde in der Meßreihe *GB* nicht untersucht und nie unterhalb von $+10^{\circ}\text{C}$ beobachtet. Etwa zwischen -60°C und -100°C tritt die Häufigkeit des Knickes II mit einem breiten Maximum zwischen -65°C und -85°C hervor,

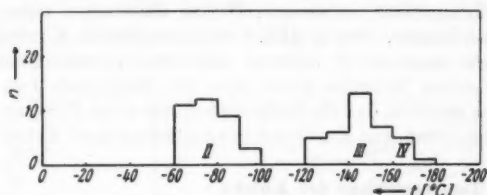


Abb. 2. Die Anzahl n der Proben der Meßreihe *GB*, bei denen in einem Temperaturintervall von 10°C ein Knick der Leitfähigkeits-Temperatur-Kurve beobachtet wurde, aufgetragen über der Temperatur t

von der die des Knickes III deutlich getrennt ist. Dieser wird unterhalb von -120°C beobachtet und hat ein Häufigkeitsmaximum etwa bei -145°C . Man könnte annehmen, daß der Ausläufer dieses Häufigkeitsmaximums nach tieferen Temperaturen dem Knick III zugehört. Dem widerspricht aber die Tatsache, daß dort, wie bei Probe 2d der Abb. 1,

neben dem Knick III ein weiterer Knick IV auftreten kann. Das Abklingen der Häufigkeitskurve unterhalb von -170°C kann damit zusammenhängen, daß die Messungen *GB* selten tiefer als bis -180°C ausgedehnt wurden. Nach Tabelle 1 sind keine Anzeichen dafür vorhanden, daß die Lage eines Knickes vom Temperaturdruck abhängig ist.

e) Die „Ablösearbeit“ c

Wie schon eingangs (Abschnitt 1) erläutert wurde, läßt sich aus der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit, wie sie etwa in Abb. 1 dargestellt ist, die „Ablösearbeit“ c berechnen. Eine Schwierigkeit besteht jedoch darin, daß man in unserem Fall einen Ansatz vom Typ der Formel (4) machen muß. Um aber diesen Ansatz richtig aufschreiben zu können, d. h. um zu wissen, wieviel Exponentialfunktionen als Summanden aneinandergereiht werden müssen, muß man wissen, wieviel Knicke in der Abhängigkeit $\log \kappa$ von $\frac{1}{T}$ überhaupt vorkommen. In der Meßreihe *GB* sind zwischen Zimmertemperatur und etwa -180°C meistens 3, einige Male auch 4 Knicke beobachtet worden. Es liegt kein Anlaß zu einer Vermutung vor, daß es weiter keine gäbe. Nach tieferen Temperaturen zu wird die Messung durch den hohen spezifischen Widerstand erschwert, bei hohen Temperaturen gibt es ausgedehnte Bereiche, in denen z. B. wegen der einsetzenden Umwandlung der Cu_2O -Proben in CuO , durch Ausscheidungsvorgänge und durch Veränderung des Störstellengehaltes die Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit sehr beeinträchtigt wird.

Wir sehen daher davon ab, für alle Proben die „Ablösearbeiten“ nach Gl. (4) zu berechnen. Wir behandeln vielmehr jeden einzelnen Abschnitt des Polygonzuges nach Gl. (1) so, als seien die Nachbarabschnitte gar nicht vorhanden. Wir wissen, daß die so gewonnenen „Ablösearbeiten“ ihrem Zahlenwert nach nicht richtig sein können, aber ebenso gewiß ist, daß auch die Gl. (4) falsche Werte liefert und daß es deswegen nicht angebracht erscheint, sich die Mühe einer Rechnung unter Benutzung von Gl. (4) zu machen.

Die nach Gl. (1) gewonnenen „Ablösearbeiten“ c sind in Abb. 3 über dem Sauerstoffdruck p_{O_2} , der vorhergehenden Temperatur aufgetragen. Man erkennt, daß die für verschiedene Proben gleicher Temperatur berechneten Werte erheblich streuen, bei geringen Drucken treten sogar Überschneidungen der Streubereiche auf. Bildet man jedoch für jeden Temperungsdruck die Mittelwerte über die an verschiedenen Proben in den einzelnen Abschnitten bestimmten „Ablösearbeiten“, dann gibt es schon bei einer Mittelung über je 6–8 Proben keine Überschneidungen mehr, und so erhält man die durch die Kurven in Abb. 3 angegebenen Abhängigkeiten der mittleren „Ablösearbeiten“ vom Temperungsdruck.

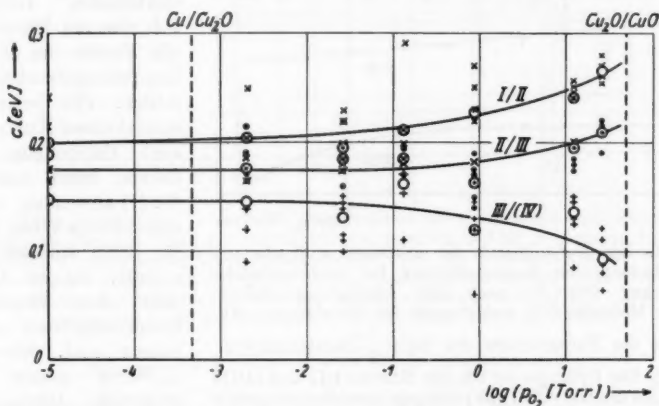


Abb. 3. Die Abhängigkeit der Mittelwerte der „Ablösearbeit“ c von Cu_2O -Proben vom Sauerstoffdruck bei vorhergehender Temperatur ($960^\circ C$) nach dem Abkühlungsverfahren unserer Meßreihe GB, aufgetragen für die einzelnen Abschnitte des Polygonzuges der $\log \kappa / T$ -Darstellung (vgl. Abb. 1). \times : Gemessene „Ablösearbeiten“ zwischen den Knicken I und II nach Gl. (1); \bullet : Gemessene „Ablösearbeiten“ zwischen den Knicken II und III nach Gl. (1); $+$: Gemessene „Ablösearbeiten“ unterhalb des Knickes III nach Gl. (1); \circ : Mittelwerte der „Ablösearbeiten“ für die einzelnen Kurvenabschnitte nach Gl. (1)

Unterhalb von etwa $p_{O_2} = 10^{-1}$ Torr sind die „Ablösearbeiten“ vom Temperungsdruck nahezu unabhängig, und sie scheinen sich auch bei einer Temperatur im Stabilitätsgebiet⁶⁾ des Cu nicht wesentlich zu ändern. Nach höherem Druck zu steigen sie dagegen zwischen Knick I und Knick III an, unterhalb des Knickes III fallen sie ab. Auffällig ist die Ähnlichkeit der Gestalt dieser Kurven mit der in Abb. 3 der III. Mitteilung⁷⁾ angegebenen Abhängigkeit der Leitfähigkeit derselben Proben vom Temperungsdruck. Dort sind als Parameter drei Temperaturen gewählt worden, nämlich $0^\circ C$, $-106^\circ C$ und $-162^\circ C$, und es läßt sich leicht erkennen, daß diese Temperaturen innerhalb je eines Geradenabschnittes des Polygonzuges der Abhängigkeit $\log \kappa$ von $\frac{1}{T}$ (vgl. Abb. 1) liegen. Es gehören also die in der Abb. 3 der III. Mitteilung für $0^\circ C$ angegebenen Leitfähigkeitswerte zu den „Ablösearbeiten“ der Kurve I/II der Abb. 3 der vorliegenden Veröffentlichung, die Werte für $-106^\circ C$ zu denen der Kurve II/III und die Werte für $-162^\circ C$ zu denen der Kurve III/IV).

d) Der Wert von κ_0

Wenn man aus den Mittelwerten der spezifischen elektrischen Leitfähigkeiten nach Abb. 3 der III. Mitteilung⁷⁾ und den zu ihnen gehörigen mittleren „Ablösearbeiten“, die der Abb. 3 dieser Veröffentlichung zu entnehmen sind, Kurven von

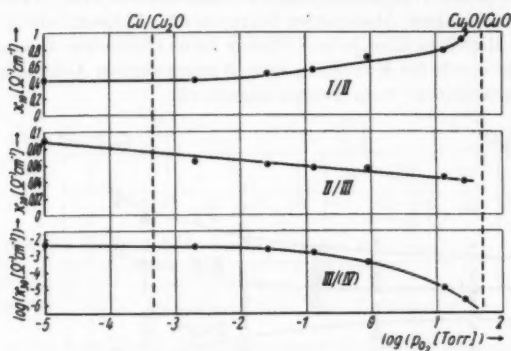


Abb. 4. Die Abhängigkeit der mittleren κ_0 -Werte von Cu_2O -Proben vom Sauerstoffdruck bei vorhergehender Temperatur ($960^\circ C$) nach dem Abkühlungsverfahren unserer Meßreihe GB, aufgetragen für die einzelnen Abschnitte des Polygonzuges der $\log \kappa_0 / T$ -Darstellung (vgl.

Abb. 1). Die Ordinate ist bei den Kurven I/II und II/III linear, bei der Kurve III/IV) dagegen logarithmisch geteilt

die mit wachsendem Druck im Abschnitt I/II schwach steigt, für II/III schwach fällt und für III/IV) so stark fällt, daß die Ordinate logarithmisch geteilt werden mußte.

e) Die „Meyersche Regel“

Nach W. Meyer¹²⁾ besteht eine lineare Beziehung zwischen der „Ablösearbeit“ c und dem Logarithmus der elektrischen Leitfähigkeit bei einer gegebenen Temperatur. Um diese Abhängigkeit in unseren Meßergebnissen erkennen zu können, tragen wir in Abb. 5 die „Ablösearbeit“ c über dem Logarithmus der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit für einige Temperaturen auf. Obwohl die Einzelwerte beträchtlich streuen, was auch bei anderen Halbleitern stets beobachtet wird, häufen sie sich wenigstens für $0^\circ C$ und für $-106^\circ C$ so, daß man eine Gerade als mittlere Verteilungskurve annehmen kann. Nun haben wir in Abb. 3 der III. Mitteilung und in der obigen Abb. 3 für die Leitfähigkeit und für die „Ablösearbeit“ Kurven gezeichnet, die eine Interpolation über die streuenden Mittelwerte darstellen. Unter Benutzung dieser interpolierten Werte erhält man, wie Abb. 5 zeigt, für alle drei Temperaturen Ergebnisse, die recht gut auf Geraden liegen. In Abschnitt 6 werden wir das Ergebnis mit der Aussage der „Meyerschen Regel“ vergleichen.

¹²⁾ W. Meyer u. H. Neldel, Z. techn. Physik 18, 588 (1937).

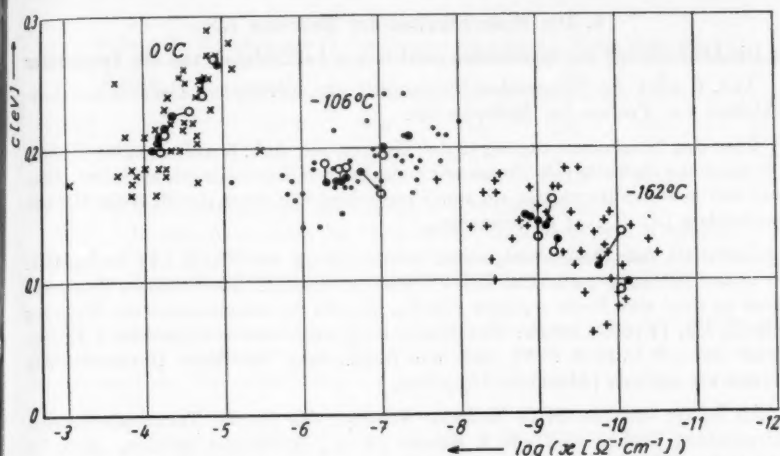


Abb. 5. Die „Ablösearbeit“ c über dem Logarithmus der spezifischen Leitfähigkeit. Als Parameter sind Temperaturwerte so gewählt, daß sie je in einem Abschnitt des in Abb. 1 angegebenen Polygonzuges liegen. \times : Die einzelnen Proben bei 0°C ; $+$: Die einzelnen Proben bei -106°C ; $+$: Die einzelnen Proben bei -162°C ; \bullet : Aus der Interpolation der Mittelwerte von c und von $\log x$ gewonnene Punkte; \circ : Die Mittelwerte von c und $\log x$, soweit sie nicht mit \bullet zusammenfallen

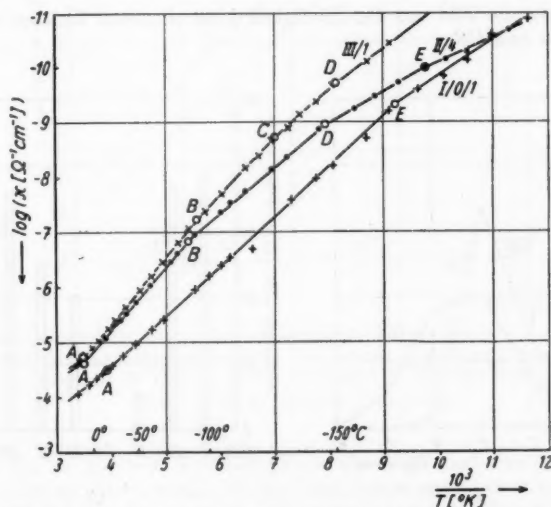


Abb. 6. 3 Beispiele für die in Meßreihe GS gefundene Abhängigkeit der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit von der Temperatur. Die vorausgehende Temperung erfolgte bei $T = 960^\circ\text{C}$. Probe I/0/1: $p_{\text{O}_2} = 1 \cdot 10^{-3}$ Torr, Abkühlungsdauer etwa 15 sec; Probe II/4: $p_{\text{O}_2} = 10$ Torr, Abkühlungsdauer etwa 15 sec; Probe III/1: $p_{\text{O}_2} = 1 \cdot 10^{-3}$ Torr, Abkühlungsdauer etwa 30 min

5. Die Meßergebnisse der Meßreihe GS

a) Die Abhängigkeit der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit von der Temperatur

Abb. 6 zeigt die Temperaturabhängigkeit der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit von Proben der Meßreihe GS.

Über den Zusammenhang der in den Kurven der Abb. 6 auftretenden Knicke mit denen der Meßreihe GB können wir zunächst nur Vermutungen anstellen. Deshalb halten wir es für richtig, sie zum Unterschied von denen der Meßreihe GB mit Buchstaben (A, B, ...) zu benennen.

Unterhalb der Zimmertemperatur wurde häufig ein Knick (A) beobachtet, der seiner Richtung nach dem Knick I (GB) entspricht. Nach tieferen Temperaturen zu folgt eine Reihe weiterer Knicke, die alle die entgegengesetzte Richtung (wie II, III, IV (GB)) haben. Der Bezeichnung nach unterscheiden wir 5 Knicke dieser Art (B, C, D, E, F)¹³⁾, und die Begründung für diese Unterscheidung werden wir sogleich (Abschnitt 5b) geben.

An keiner von den 54 in Meßreihe GS über den ganzen Temperaturbereich untersuchten Proben sind alle 6 Knicke (A–F) beobachtet worden. Abb. 7a zeigt vielmehr, daß die Zahl derjenigen Proben, an denen 3 Knicke auftraten, am größten ist, ebenso wie es in Meßreihe GB gefunden wurde. (Beim Vergleich der beiden Kurven der Abb. 7a ist zu berücksichtigen, daß bei der Meßreihe GB Temperaturen unter -180°C selten miterfaßt wurden. Dadurch war die Bestimmung der Kurvengestalt unterhalb von -170°C schon unsicher, und etwa dort noch vorhandene Knicke konnten nicht beobachtet werden.

Abb. 7b gibt ein Bild von der Häufigkeit jedes einzelnen Knickes der beiden Meßreihen GB und GS.

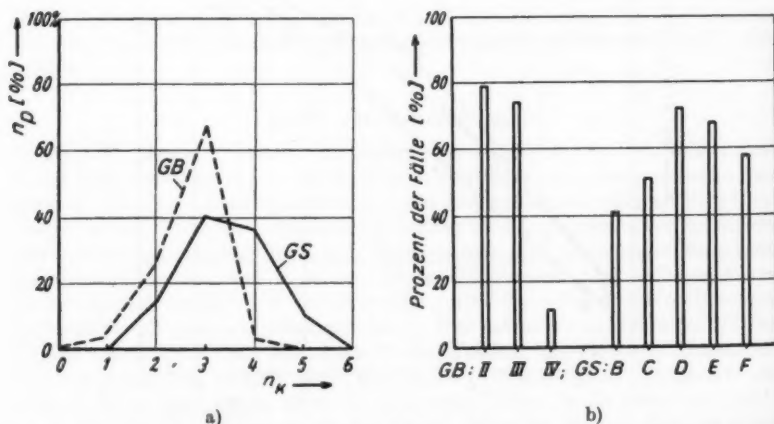


Abb. 7. a) Die Anzahl n_p derjenigen Proben (in %), bei denen n_K Knicke in der Abhängigkeit der logarithmierten spez. Leitfähigkeit von der reziproken Temperatur beobachtet wurden. b) Die prozentuale Häufigkeit der einzelnen Knicke

¹³⁾ Beispiele, die auch einen Knick F enthalten, folgen in Abb. 8.

Tabelle 2
Die Lage der Knickpunkte in den Kurven $\log \kappa$ über $1/T$ der Meßreihe GS

Knick	A	B	C	D	E	F
$\bar{T}_K [^\circ K]$	284,5	193	164	130	107,5	91
ΔT_K	± 7	± 9	± 11	± 8	± 4	$\pm 2,5$
n_K	47/81	23/57	28/55	36/50	31/46	18/31

\bar{T}_K = Mittelwert der Lage des Knickes K über alle Proben,
 ΔT_K = Mittlere Abweichung der beobachteten Einzelwerte vom Mittelwert
 n_K = Zahl der Proben, bei denen der Knick K beobachtet wurde, über der Zahl der in dem betreffenden Temperaturbereich untersuchten Proben.

Die beiden Kurven a und b der Abb. 8 sind an derselben Probe bei verschiedener Vorbehandlung erhalten worden. Die betreffende Probe wurde, nachdem sie zunächst nach der Oxydation etwa ein Jahr gelagert hatte, 10 Minuten lang bei

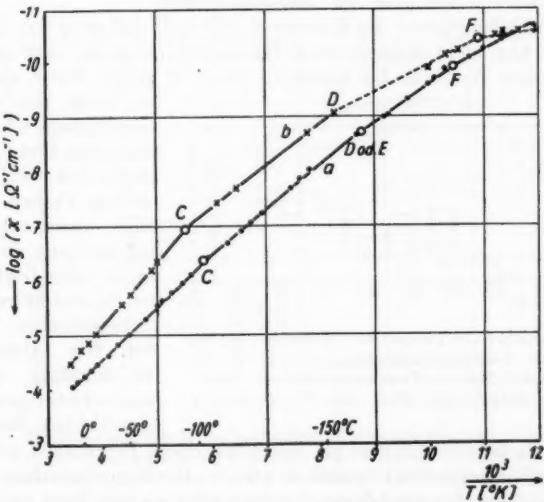


Abb. 8. Zwei weitere Beispiele für die in Meßreihe GS beobachtete Abhängigkeit der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit von der Temperatur. Die Temperungen erfolgten bei $T = 960^\circ \text{C}$ und $p_{\text{O}_2} = 30$ Torr. a: Probe I/u/2 nach 10 Minuten Temperung; b: Probe I/u/2 nach 10 Stunden Temperung

$T = 960^\circ \text{C}$ und $p_{\text{O}_2} = 30$ Torr getempert, abgekühlt und durchgemessen. Das Ergebnis gibt die Kurve a an. Wenige Tage später wurde sie erneut getempert, und zwar 10 Stunden bei derselben Temperatur und demselben Sauerstoffdruck, und nach der Abkühlung erhielt man die Kurve b . (Die Meßpunkte der Kurve b sind nicht zahlreich genug, um die Temperaturabhängigkeit genau festzulegen, was in diesem Fall nicht beabsichtigt war). Eine Reihe solcher Versuche mit anderen Proben, anderen Sauerstoffdrücken und anderen Temperungszeiten veranlaßten

uns zu der bereits in der III. Mitteilung (Abschnitt F)¹⁾ veröffentlichten qualitativen Aussage, daß im Gegensatz zu den Versuchen bei hohen Temperaturen, wo größenordnungsmäßig 1 Minute zur Einstellung der Probe auf das Gleichgewicht mit Druck und Temperatur genügen sollen¹⁴⁾, die endgültige Tieftemperaturleitfähigkeit unter Umständen nach einigen Stunden noch nicht erreicht ist. Die zur Einstellung erforderliche Zeit wächst wahrscheinlich mit sinkendem Sauerstoffdruck und mit der Zeit, die seit der letzten Glühung in Luft von Atmosphärendruck vergangen ist. Es wurde stets beobachtet, daß die Leitfähigkeit mit wachsender Temperungszeit bis zu einem stationären Wert abnahm. — Die betreffenden Versuche sind noch nicht systematisch genug durchgeführt worden, daß man quantitative Ergebnisse mitteilen könnte. Im übrigen dürfte die erforderliche Systematik wegen der ziemlich unvermeidlichen Kopplung verschiedener Parameter nur sehr schwer durchführbar sein.

b) Die Temperaturlage der Knicke

In Abb. 9 zeigen wir, analog wie in Abb. 2, die Häufigkeitsverteilung der Knicke der Meßreihe GS über der Temperaturachse.

An der Verteilungskurve des Knickes A fällt auf, daß er in der Meßreihe GS neben einem hier nicht aufgetragenen Häufigkeitsmaximum nahe der Zimmertemperatur einen Ausläufer bis unterhalb von 0° C zeigt. Wenn man, was wir

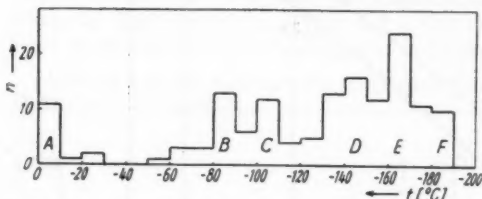


Abb. 9. Die Anzahl n der Proben der Meßreihe GS, bei denen in einem Temperaturintervall von 10° C ein Knick der Leitfähigkeits-Temperatur-Kurve beobachtet wurde, aufgetragen über der Temperatur t

hier nicht tun wollen, für jeden einzelnen Temperungsdruck eine Verteilungskurve, wie sie Abb. 9 für alle untersuchten Proben zeigt, trägt, dann erkennt man, daß meistens der Knick A um so tiefer liegt, je höher der Sauerstoffdruck bei der vorhergehenden Temperung war. Wir halten es nicht für angängig, auf Grund unserer bisherigen Ergebnisse diese Abhängigkeit graphisch

aufzutragen, da diese bei kleinem p_{O_2} durch die obere Begrenzung unseres Meßbereiches (Zimmertemperatur) beeinflusst wird. — Der Temperaturlage nach sowie vor allem dem Sinne der zugehörigen Neigungsänderung nach kann man mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen, daß Knick I (GB) und Knick A (GS) identisch sind. (In Abb. 2 ist Knick I nicht aufgetragen, da seine Lage in Meßreihe GB nicht genau festgelegt und er nie unterhalb von +10° C beobachtet wurde.) Nach einer breiten Lücke schließt sich unterhalb von -70° C bis zur unteren Grenze des Meßbereiches ein ausgedehntes Gebiet an, in dem verschiedene Knicke in der Leitfähigkeitskurve aufgetreten sind. Zunächst haben wir etwa bei -80° C ein Maximum B, das recht gut mit dem des Knickes II (GB) zusammenfällt. Der Lage nach scheint Knick III (GB) dem Maximum D der Abb. 9 und Knick IV (GB) dem Maximum E zu entsprechen. Es bleibt nun die Frage offen, ob die sich hervorhebende Häufigkeit C und das schwache Abklingen unterhalb von -180° C (F) als weitere Knicke

¹⁴⁾ Vgl. z. B.: H. Dünwald u. C. Wagner, Z. physik. Chem. (B) 22, 212 (1933).

anzusehen sind. Für diese Annahme spricht die Tatsache, daß in den einzelnen experimentell gewonnenen Kurven öfters neben einem Knick bei *B* ein solcher bei *C* auftritt oder ein Knick bei *D* neben einem bei *C*, auch die Kombination $B + C + D$ kommt vor. (Entsprechendes gilt für *F*.) Das schließt nicht aus, daß in einigen Fällen, z. B. bei Kurve *a* der Abb. 8, es bei einem Knick zweifelhaft erscheint, ob er dem einen oder dem anderen Häufigkeitsmaximum zugerechnet werden muß. So kann man formal zu der Annahme von 6 Knicken kommen, die jedoch entsprechend Abb. 7a nicht alle gleichzeitig auftreten können.

Eine Abhängigkeit der Lage oder der Häufigkeit eines Knickes vom Temperungsdruck ist nur beim Knick *A* in der bereits erwähnten Weise beobachtet worden.

c) Die „Ablösearbeit“ *c*

Nach Gl. (1) lassen sich aus den Temperaturabhängigkeiten der Leitfähigkeit (Abb. 6) für die einzelnen Abschnitte verschiedene „Ablösearbeiten“ *c* berechnen, die ihrer Größe nach zwischen 0,03 und 0,3 eV liegen. Die so aus den Meßergebnissen

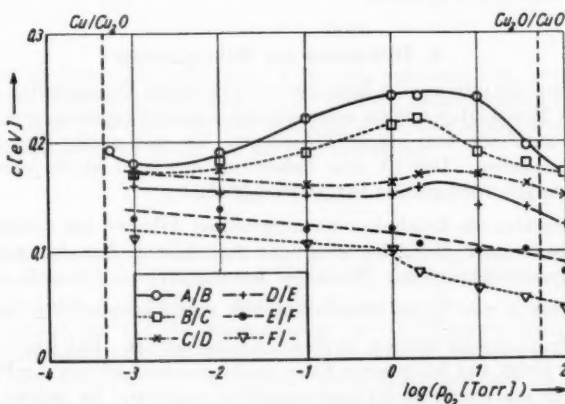


Abb. 10. Die Abhängigkeit der Mittelwerte der „Ablösearbeit“ *c* von Cu_2O -Proben vom Sauerstoffdruck bei vorhergehender Temperung (960°C) nach dem Abkühlungsverfahren unserer Meßreihe GS, aufgetragen für die einzelnen Abschnitte des Polygonzuges der $\log \propto \frac{1}{T}$ -Darstellung (vgl. Abb. 6 u. Kap. 5c). *A/B*: Zwischen Knick *A* und Knick *B* usw.

gewonnenen Werte für *c* zeigen aber eine derartige Streuung, daß es uns nicht sinnvoll erscheint, die Einzelwerte über dem Sauerstoffdruck der Temperung aufzutragen. Wenn man nun Mittelwerte über die zusammengehörigen „Ablösearbeiten“ aller bei gleichem Druck getemperten Proben bilden will, ergibt sich die Schwierigkeit, daß im Rahmen der in Abb. 7a angegebenen Häufigkeitsverteilung alle möglichen Kombinationen an Knicken vorkommen und die Zuordnung der „Ablösearbeiten“ verschiedener Proben aus diesem Grunde nicht eindeutig ist. Um aber wenigstens einen qualitativen Überblick über den Verlauf der „Ablösearbeit“ *c* mit dem Temperungsdruck zu gewinnen, gehen wir folgendermaßen vor: Wir nehmen an, an jeder Probe müßten in dem untersuchten Temperaturbereich alle

6 Knicke $A-F$ auftreten. Die in der Leitfähigkeitskurve (vgl. Abb. 6) erkennbaren Knicke werden, so gut es geht, identifiziert. Nun nehmen wir an, die übrigen Knicke seien bei der betreffenden Probe deshalb nicht zu erkennen, weil die „Ablösearbeiten“ beiderseits gleich sind. Auf diese Weise erhalten wir für jede Probe 7 „Ablösearbeiten“, die im allgemeinen nicht alle voneinander verschieden sind. Wenn wir nun für jeden Temperungsdruck die Mittelwerte bilden, dann ergibt sich Abb. 10. Wir sind uns darüber im Klaren, daß die Sicherheit, mit der die Kurven der Abb. 10 festgelegt sind, keineswegs vergleichbar ist mit der der Abb. 3.

Man erkennt eine Ähnlichkeit der Gestalt der Kurve A/B mit der der Abhängigkeit der Mittelwerte der Logarithmen der Leitfähigkeiten vom Temperungsdruck derselben Proben (vgl. Abb. 4 der III. Mitteilung⁷). Nach tieferen Temperaturen zu zeigt es sich, daß die „Ablösearbeiten“ mit wachsendem Temperungsdruck monoton abnehmen. Eine solche monotone Abnahme, wenn auch von anderer Gestalt, zeigt auch die Kurve III/(IV) der Abb. 3.

Die Versuche, κ_0 oder die Meyersche Gerade aufzutragen, ergibt in Meßreihe GS unbefriedigende Ergebnisse.

6. Diskussion der Meßergebnisse

Alle Werte, die man aus der Messung der elektrischen Eigenschaften des Kupferoxyduls bei Temperaturen etwa unterhalb der Zimmertemperatur gewinnt, zeigen von Probe zu Probe sehr starke Streuungen, die weit größer sind als etwaige Meßungenauigkeiten. Das ist eine Erfahrung, die wohl kaum jemandem, der solche Messungen durchgeführt hat, erspart blieb.

Wir betrachten als Ergebnisse der mitgeteilten Arbeiten das durchschnittliche Verhalten mehrerer Proben, die, soweit die gegenwärtige Kenntnis reicht, gleichmäßige Vorgeschichte haben. Wir sehen aus den Abb. 1, 6 und 8, daß die Abhängigkeit $\log \kappa$ von $\frac{1}{T}$ aus Geradenstücken zusammengesetzt zu sein scheint.

Es ist die Frage gestellt worden, ob diese „Kurve“ an den „Knicken“ differenzierbar sei oder nicht, was in unserem Falle gleichbedeutend ist mit der Frage, ob an den Knicken ein endlicher Krümmungsradius existiert. Es gelang uns nicht, dort einen endlichen Krümmungsradius nachzuweisen, was aber vielleicht mit der begrenzten Genauigkeit der Meßmethode zusammenhängt. Die Meßergebnisse zeigen aber ganz sicher, daß eine Interpolation der Meßpunkte durch eine Kurve mit nahezu über den ganzen Bereich gleichmäßig endlicher Krümmung nicht richtig sein kann. Ein Zusammenhang zwischen der Vorbehandlung und der Temperatur bei der ein Knick auftritt, konnte nur bei dem etwa zwischen Zimmertemperatur und 0°C auftretenden Knick beobachtet werden, der sich von den übrigen durch die Richtung, in der er die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit beeinflusst, unterscheidet. Wir vermuten deshalb, daß die Ursache, die seinem Auftreten zugrunde liegt, von der der anderen Knicke verschieden ist. Wenn man die beiden Meßreihen GB und GS vergleicht, dann ist man geneigt, der Lage der zwischen -70°C und -190°C beobachteten Knicke keine besondere Bedeutung beizulegen. Sie bevorzugen zwar unter geeigneten Vorbehandlungsbedingungen, wie in Meßreihe GB , gewisse Temperaturbereiche; aber Abb. 9 zeigt, daß diese Bevorzugung unter den Bedingungen der Meßreihe GS sehr verwaschen ist. Vermutlich kann man diesen Effekt auf den Einfluß der Abkühlungsgeschwindigkeit zurück-

führen, und das würde bedeuten, daß man bei nicht zu schneller Abkühlung des Kupferoxyduls (z. B. wie in Meßreihe GB) durchsichtigere Verhältnisse bekommt als bei sehr schneller Abkühlung. Neue Untersuchungen werden das zu entscheiden haben.

Die „Ablösearbeiten“ c der einzelnen Kurvenabschnitte liegen etwa zwischen 0,03 und 0,3 eV. Während es in Meßreihe GB möglich war, die Werte für c unter Verwendung der Gl. (1) einigermaßen zuverlässig aufzutragen, können die Kurven der Abb. 10 (GS) nur zur Orientierung über das allgemeine Verhalten von c bei Änderung von p_{O_2} unter den erläuterten Abkühlungsbedingungen dienen. Die für die Meyersche Regel geltende Beziehung scheint nur für die Störstellen mit höherer „Ablösearbeit“ ($c \approx 0,2$ eV) zu gelten. Diese Gültigkeit könnte für Meßreihe GB in Abb. 5 (0° C und -106° C) gezeigt werden. In der Meßreihe GS gibt das Aufzeichnen der Meyerschen Geraden zwar ein unbefriedigendes Ergebnis; aber ein Vergleich der Gestalt der Kurve A/B der Abb. 9 mit der der Leitfähigkeitskurven der Abb. 4 der III. Mitteilung¹⁾ zeigt, daß eine Tendenz zur Erfüllung der Meyerschen Regel besteht, die aussagt, daß bei einer vorgegebenen Temperatur

$$c \sim -\log \kappa + \text{const.} \quad (5)$$

ist. Von den niederen „Ablösearbeiten“ kann man das nach Abb. 10 nicht sagen, und wir wagen nicht zu entscheiden, ob der einfache Zusammenhang zwischen c und $\log \kappa$ bei -162° C in Abb. 5 vielleicht zufällig ist; denn es ist uns nicht bekannt, daß man bisher jemals an Stelle von (5) eine Beziehung

$$c \sim +\log \kappa + \text{const.} \quad (6)$$

gefunden hat.

Wenn man als richtig annimmt, daß die Werte für κ_0 wesentlich durch die Konzentration der mit der „Ablösearbeit“ c (bzw. c_2) behafteten Störstellen gegeben sind, dann gibt Abb. 4 zu denken. Nach der Wagnerschen Auffassung¹⁴⁾ nimmt die Konzentration der für die Eigenschaften des Cu_2O verantwortlichen Störstellen mit wachsendem Sauerstoffdruck zu. Abb. 4 zeigt diese Art der Abhängigkeit nur für den Abschnitt I/II. Wir müssen daher annehmen, daß die für die Abschnitte II/III und III/IV verantwortlichen Störstellen anderer Art sind und der Zusammenhang von κ_{30} und p_{O_2} bzw. von κ_{30} und p_{O_2} ein Sekundäreffekt ist.

Nach Abb. 4 bewegt sich κ_{10} in Abhängigkeit von p_{O_2} innerhalb etwa einer halben Zehnerpotenz, was größenordnungsmäßig mit den Ergebnissen der entsprechenden Messungen bei hohen Temperaturen⁴⁾ übereinstimmt. Mehr ist wohl nach den Überlegungen, die in der V. Mitteilung¹⁵⁾ über den Einfluß der Abkühlung durchgeführt wurden, nicht zu erwarten.

7. Schluß

Die Ergebnisse dieser Mitteilung zeigen erneut, daß das Verfahren der Abkühlung des bei hoher Temperatur vorbehandelten Halbleiters von ganz entscheidendem Einfluß auf seine Eigenschaften ist. Nach den vorliegenden Erfahrungen wird man bei zukünftigen Untersuchungen dieser Art den allergrößten

¹⁵⁾ G. Blankenburg u. O. Böttger, Ann. Physik (6) 10, 241 (1952).

Wert auf genau reproduzierbare Abkühlungsbedingungen legen müssen. So scheint es möglich zu sein, durch geeignete Auswertung der Meßergebnisse die Einflüsse verschiedener Störstellenarten, die vielleicht z. T. erst bei der Abkühlung entstehen, auf das Verhalten des Materials voneinander zu trennen. Es hat den Anschein, als sei dafür die gewöhnlich als wünschenswert angesehene extrem schnelle Abkühlung weniger günstig als eine Abkühlung mit mäßiger Geschwindigkeit.

Es soll versucht werden, durch weitere Untersuchungen Klarheit zu schaffen.

Die vorliegende Arbeit wurde unter Leitung von Herrn Prof. Dr. G. C. Mönch angefertigt, dem wir an dieser Stelle für viele Anregungen und Unterstützungen danken.

Halle, Saale, II. Physikalisches Institut der Martin-Luther-Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 27. Dezember 1952.)

Über die Halbleitereigenschaften des Kupferoxyduls. VII

Der Halleffekt unterhalb der Zimmertemperatur¹⁾

Von Helmut Nieke

(Mit 16 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es werden Messungen des Halleffektes und der Leitfähigkeit an Cu_2O im Temperaturbereich von $+50^\circ\text{C}$ bis -150°C mitgeteilt, das bei 960°C und bei einem Sauerstoffdruck zwischen 30 und $1 \cdot 10^{-3}$ Torr getempert und schnell abgekühlt wurde. Bei 2 Torr zeigt die Hallkonstante R , die dem Vorzeichen nach positiv ist, ein Maximum, während die Leitfähigkeit κ beim gleichen Druck ein Minimum aufweist. Ferner ist der Sauerstoffdruck 2 Torr dadurch ausgezeichnet, daß das Produkt $R \cdot \kappa$, das ein Maß für die Ladungsträgerbeweglichkeit ist, zwischen -60° und -100°C schneller ansteigt als bei anderen Temperatursdrücken.

1. Einleitung

Bezeichnet man die Hallspannung mit U_H [Volt], die Dicke der Probe mit d [cm], den Primärstrom mit I [Amp] und die Kraftflußdichte mit B [Voltsec/cm²], dann ist die Hallkonstante definiert durch

$$R = \frac{U_H \cdot d}{I \cdot B} [\text{cm}^3 \text{ Amp}^{-1} \text{ sec}^{-1}]. \quad (1)$$

Die Konstante R wird negativ²⁾, wenn das Vorzeichen der Hallspannung der Ablenkung freier Elektronen entspricht. In diesem Fall spricht man vom normalen, im Fall des umgekehrten Vorzeichens vom anomalen Halleffekt. Den anomalen Effekt denkt man sich bedingt durch die Wanderung von Elektronenfehlstellen (auch Elektronenlöcher oder Defektelektronen genannt).

Theoretisch ergibt sich die Hallkonstante z. B. nach H. Fröhlich³⁾

$$R = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{f}{e \cdot c_0 \cdot N}, \quad (2)$$

wobei e die Ladung eines Elektrons, c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit, N die Zahl der Leitungselektronen pro Raumeinheit und f die mittlere Freiheitszahl ist.

¹⁾ Aus einer Diplomarbeit der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. V. Mitteilung: Ann. Physik (6) 10, 241 (1952). (Dort auch Hinweise auf die früheren Mitteilungen.) VI. Mitteilung: Ann. Physik (6) 12, 281 (1953).

²⁾ W. Gerlach, Handb. d. Physik XIII (Berlin 1928) S. 229.

³⁾ H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle (Berlin 1936).

Diese kann man definieren durch

$$f = \frac{\text{mittl. Beschleunigung eines der betr. Elektronen}}{\text{Beschleunigung eines freien Elektrons}},$$

wobei beide Beschleunigungen durch dieselbe Feldstärke hervorgebracht zu denken sind. Für freie Elektronen ist also $f = 1$, für Defektelektronen $f < 0$.

Beim Halbleiter ist die Konzentration der Ladungsträger N stark temperaturabhängig und folgt dem Exponentialgesetz

$$N = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{c}{k \cdot T}\right). \quad (3)$$

Dabei ist c ein Maß für die Ablösearbeit⁴⁾. Wenn man (3) in (2) einsetzt, folgt für die Temperaturabhängigkeit von R

$$R \sim \exp\left(\frac{c}{k \cdot T}\right), \quad (4)$$

wenn man zunächst N_0 und f als temperaturunabhängig ansieht. Trägt man $\log R$ über $1/T$ auf, dann läßt sich nach

$$\log R = \frac{c}{k \cdot T} + \text{const.} \quad (5)$$

diese Abhängigkeit durch eine Gerade darstellen.

Die spezifische Leitfähigkeit einer Probe der Länge l , der Dicke d und der Breite b ,

$$\kappa = \frac{I}{U} \cdot \frac{l}{d \cdot b} [\text{Ohm}^{-1} \text{cm}^{-1}], \quad (6)$$

wenn U die zur Erzeugung des Stromes I an die Probe gelegte Spannung ist, schreibt man bekanntlich auch

$$\kappa = e \cdot N \cdot v, \quad (7)$$

wo v die mittlere Beweglichkeit, d. h. die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger bei der Feldstärke 1, ist.

Wenn in (7) der Ansatz (3) eingesetzt wird, so erhält man die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit für einen Halbleiter

$$\kappa = \kappa_0 \cdot \exp\left(-\frac{c}{k \cdot T}\right). \quad (8)$$

Das Produkt aus Hallkonstante und Leitfähigkeit ergibt aus Gl. (1) und Gl. (6)

$$R \cdot \kappa = \frac{U_H}{U} \cdot \frac{l}{b \cdot B} [\text{Volt}^{-1} \text{sec}^{-1} \text{cm}^2] \quad (9)$$

und aus Gl. (2) und Gl. (7)

$$R \cdot \kappa \sim f \cdot v. \quad (10)$$

⁴⁾ G. Blankenburg u. G. Schubart, Ann. Physik (6) 12, 281 (1953).

Man kann also hiermit direkt die Beweglichkeit der Ladungsträger bestimmen, falls f und die Proportionalitätskonstanten bekannt sind. Am Kupferoxydul wurde der Halleffekt von W. Vogt⁵⁾ und von E. Engelhard⁶⁾ bei tiefen Temperaturen und von W. Schottky und E. Waibel⁷⁾ auch bei hohen Temperaturen gemessen. W. Vogt gibt das Vorzeichen der Hallkonstanten bei Berücksichtigung des von O. Fritzsche⁸⁾ berichtigten anfänglichen Irrtums positiv an, die letzteren fanden einen Umschlag des Vorzeichens bei etwa 500° C in „schlechtleitendem Kupferoxydul“.

Nach C. Wagner⁹⁾ steigt bei einem Überschußhalbleiter die Leitfähigkeit mit fallendem Druck der elektronegativen Komponente, bei einem Defektelektronenhalbleiter dagegen fällt sie. Da C. Wagner und Mitarbeiter¹⁰⁾ am Kupferoxydul bei hohen Temperaturen ein Abfallen der Leitfähigkeit mit fallendem Sauerstoffdruck feststellten und da auch das Vorzeichen von Thermospannung und Halleffekt damit nicht im Widerspruch steht, war Kupferoxydul als Defekthalbleiter gekennzeichnet. Da die bisher genannten Autoren außer C. Wagner und Mitarbeiter¹⁰⁾ nur „sauerstoffreiches“ und „sauerstoffarmes“ Kupferoxydul unterschieden, untersuchte G. Blankenburg¹¹⁾ auch bei tiefen Temperaturen die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von dem bei einer vorhergehenden Temperung herrschenden Sauerstoffdruck. Überraschenderweise zeigten seine Ergebnisse eine Abhängigkeit, umgekehrt wie die von C. Wagner und Mitarbeitern bei hohen Temperaturen gemessenen, nämlich die Leitfähigkeit stieg mit fallendem Sauerstoffdruck. Da eine solche Abhängigkeit nur bei Überschußhalbleitern eintreten sollte, wurde vom Verfasser eine Untersuchung über die Abhängigkeit des Halleffektes bei tiefen Temperaturen vom Sauerstoffdruck der vorhergehenden Temperung durchgeführt, und über die Ergebnisse wird nunmehr berichtet. Diese experimentellen Arbeiten erfolgten gleichzeitig mit denen von G. Schubart und von C. Fritzsche¹¹⁾, so daß Erfahrungen und Folgerungen aus deren Arbeiten nicht berücksichtigt werden konnten.

2. Herstellung und Temperung der Proben

Die Oxydation des Kupfers und die Temperung der Proben vor der Messung erfolgten nach dem in der I. Mitteilung¹²⁾ angegebenen Verfahren. Das Material lagerte zwischen der Oxydation und der Temperung mehrere Monate, und aus diesem Vorrat entnahmen auch G. Schubart und C. Fritzsche ihre Proben. Für die Untersuchung des Halleffektes kamen Proben von 20 bis 25 mm Länge, etwa 10 mm Breite und 1 bis 1,5 mm Dicke zur Verwendung. Die Temperungen erfolgten je 12 Stunden bei 960° C in einem Quarzrohr von 14 mm lichter Weite. Nach Ablauf der Temperungszeit wurde bei unverändert bleibendem Druck der

⁵⁾ W. Vogt, Ann. Physik (5) 7, 183 (1930).

⁶⁾ E. Engelhard, Ann. Physik (5) 17, 501 (1933).

⁷⁾ W. Schottky u. F. Waibel, Physik. Z. 34, 858 (1933); 36, 912 (1935).

⁸⁾ O. Fritzsche, Ann. Physik (5) 22, 375 (1935), Abschnitt 8.

⁹⁾ C. Wagner, Z. physik. Chem. (B) 22, 181 (1933).

¹⁰⁾ H. Dünwald u. C. Wagner, Z. physik. Chem. (B) 17, 467 (1932); J. Gundermann, K. Hauße u. C. Wagner, Z. physik. Chem. (B) 37, 148 (1937).

¹¹⁾ G. Blankenburg, C. Fritzsche u. G. Schubart, Ann. Physik (6) 10, 217 (1952).

¹²⁾ G. Blankenburg u. K. Kassel, Ann. Physik (6) 10, 201 (1952).

Ofen so schnell wie möglich weggeschoben und Wasser über das Quarzrohr gegossen (vgl. das Abkühlungsverfahren GS der III. Mitteilung¹¹⁾). Nach Reinigung der Oberfläche der Proben durch Schmirgeln erhielten die beiden kleinsten Flächen im Vakuum aufgedampfte Kupferüberzüge. Es wurden jeweils drei Proben gemeinsam getempert und anschließend nacheinander durchgemessen. Sie konnten stets mehrmals verwendet werden. In den nachfolgenden Abbildungen 3 bis 10 sind gleiche Proben durch gleiche Zeichen gekennzeichnet.

Die Reihenfolge der Temperungen ist aus Tabelle 1 ersichtlich.

Tabelle 1
Aufstellung der Proben, ihre Maße und Behandlung

Zeichen in Abb. 3–10			□	△	×	○	▽	⊖	○	◇
Probennummer			I 1/1	I 1/2	I 2/2	I 2/3	III 1/1	III 1/2	III 2/1	III 3/3
Länge [mm]			24,9	23,9	24,9	24,3	23,5	24,1	24,5	22,5
Breite [mm]			9,04	8,78	8,85	9,27	9,3	9,28	9,34	9,64
Dicke [mm]			1,09	0,96	1,21	1,39	1,17	1,41	1,46	1,27
Nr. d. Temp.	Sauerstoff- druck [Torr]	Zeit [Std.]								
1.	Vakuum	10	×				×			
2.	5	10		×						
3.	30	10	×	×		×		×		
4.	5	12	×	×			×	×		
5.	1	12	×		×					
6.	10 ⁻¹	12				×			×	×
7.	10 ⁻²	12				×	×	×		
8.	10 ⁻³	12		×	×				×	
9.	1	14		×	×				×	
10.	30	12		×	×				×	
11.	10 ⁻¹	12			×			×	×	
12.	3 · 10 ⁻¹	12			×	×				×
13.	2	12			×	×				×

3. Meßverfahren

Die Probe wurde mit den mit Kupfer bedampften Flächen zwischen zwei sich federnd aufpressende platinerte Kupferbacken gebracht, die auf einer Glimmerplatte zusammen mit den federnden Hallelektroden montiert waren (ähnlich wie Abb. 1b der III. Mitteilung¹¹⁾) und zur Spannungszuführung für die Primärspannung dienten. Die Temperatur dieser Kupferelektroden bestimmten zwei mit ihnen verlötete Thermoelemente. Um die Temperatur der Probe in der Mitte möglichst genau zu bestimmen, erhielten auch die Hallelektroden Thermoelemente. Dazu wurde je ein in dünne Platinfolie eingelötetes Thermoelement aus 0,05 mm starken Kupfer- und Konstantandrähten in je eine auf der Stirnkante zweier Kunstharzprismen eingelassenen feinen Rille eingekittet, so daß die vom Platinblech umgebene Lötstelle die Hallelektrode bildete. Eines dieser als Halter für die Hallelektrode dienenden Kunstharzprismen war auf der Glimmerplatte mittels einer Spindel verschiebbar, um die Elektroden vor Beginn der Messung auf Äquipotentiallinien bringen zu können. Diese Probenhalterung befand sich in einem evakuierbaren und teilweise abgeflachten Glasrohr, dessen Anordnung zwischen den Polschuhen des Magneten in Abb. 1 gezeigt wird.

Um ein möglichst starkes und homogenes Magnetfeld zu haben und trotzdem eine ausreichende Wärmeisolation zu erhalten, wurden im Innern des einfachen Glasgefäßes *G* die Polschuhe *P* fortgesetzt. Das Ganze war dann in Wärmeisolationmaterial eingebettet. Der Polabstand betrug 19 mm, die Polschuhfläche $45 \times 50 \text{ mm}^2$. Die Erregungsstromstärke wurde bei allen Messungen so eingestellt, daß die Kraftflußdichte in der Mitte $B = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ [Voltsec cm}^{-2}]$ war. In einer Entfernung von 1 cm vom Mittelpunkt war sie um 3%, von 2 cm um 12% kleiner.

Die tiefen Temperaturen der Probe ließen sich mit einer von F. Henning¹³⁾ angegebenen Anordnung erzeugen. Dabei wurde der flüssige Stickstoff in ein Dewargefäß gefüllt und mit einem zweifach durchbohrten Stopfen verschlossen. Durch die eine Bohrung ragte ein Vakuummantelheber, der mit einem Glasrohr bis zum Boden des Gefäßes verlängert war und an dessen anderem Ende der Stickstoff durch zwei Düsen in das die Polschuhe umgebende Glasgefäß ausströmen konnte. Die andere Bohrung im Stopfen des Dewargefäßes war mit einem Glasrohr verbunden, das verschiedentlich tief in Wasser eingetaucht wurde, um die Ausströmungsgeschwindigkeit des Stickstoffs und somit die Temperatur der Probe regeln zu können. Es mußte darauf verzichtet werden, die Polschuhe in ein Flüssigkeitsbad zu betten.

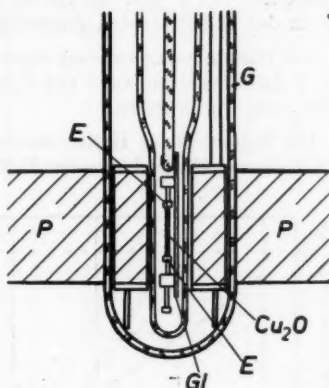


Abb. 1. Schnitt durch die Versuchsanordnung. *P*: Polschuhe, *G*: Glasgefäß, *Gl*: Glimmerplatte, *E*: platinierte Kupferbacken

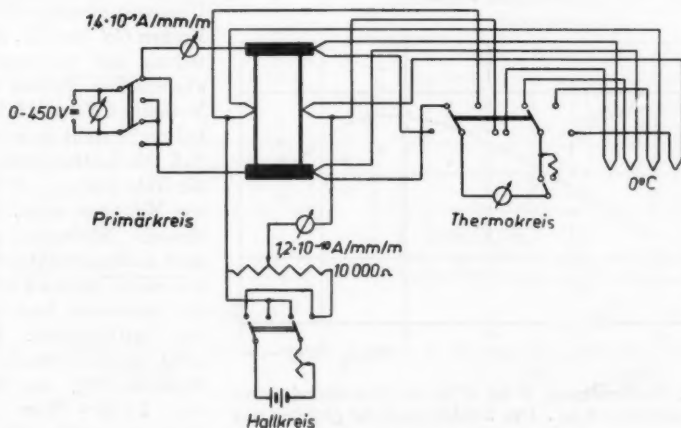


Abb. 2. Prinzipschaltbild

¹³⁾ F. Henning, Z. Instrumentenkde 33, 33 (1913).

Dabei ließen sich in einigen Temperaturbereichen Temperaturdifferenzen zwischen der oberen und der unteren Kupferbacke der nach Abb. 1 zwischen den Polschuhen befindlichen Probenhalterung nicht ganz vermeiden, es traten maximal Differenzen von 3° auf. Als für die gemessenen Eigenschaften maßgebend wurde die an den Hallelektroden gemessene Temperatur angenommen.

Zur Hallspannungsmessung diente eine Gleichstromkompensationsvorrichtung mit Präzisionswiderständen und Spiegelgalvanometer (Empfindlichkeit $1,2 \cdot 10^{-10}$ [Amp/mm/m]) gemessen.

Die Definition der Hallkonstanten bezieht sich auf unendlich lange Proben. Für Proben endlicher Länge hat E. H. Hall¹⁴⁾ eine Korrektionsformel angegeben,

die für Proben der hier verwendeten Größe 8% ergibt. Diese Korrektur ist an den nachfolgend angegebenen Meßergebnissen angebracht.

4. Meßergebnisse

a) Abhängigkeit der Leitfähigkeit und der Hallkonstante vom Sauerstoffdruck der Temperatur

Die Abb. 3 zeigt die bei 0°C gemessenen Leitfähigkeiten in Abhängigkeit vom Sauerstoffdruck der bei 960°C durchgeführten Temperatur. In Übereinstimmung mit den Proben GS der III. Mitteilung und den schnell abgekühlten Proben der Meßreihe CF der III. Mitteilung¹¹⁾ stellt man fest, daß die Leitfähigkeit in der Nähe von $p_{\text{O}_2} = 2$ Torr ein Minimum zeigt. Von diesem Minimum aus nach niedrigeren Drucken hin zeigen unsere Proben ein monotonen Ansteigen der Leitfähigkeit. Das steht im Widerspruch zur Meßreihe GS, die etwa bei $1 \cdot 10^{-2}$ Torr ein Maximum zeigte, obwohl

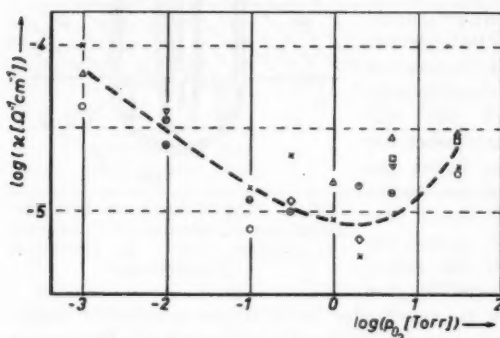


Abb. 3. Leitfähigkeit κ bei 0°C in Abhängigkeit vom Temperaturdruck p_{O_2} . Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Proben, die mehrmals bei verschiedenen Sauerstoffdrucken getempert wurden

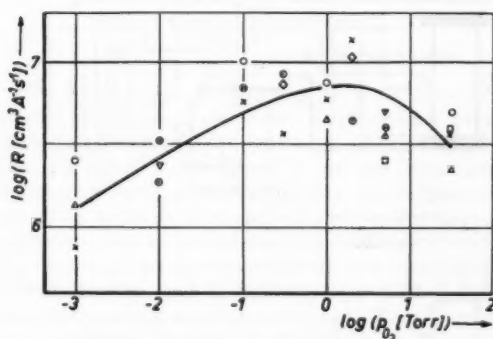


Abb. 4. Hallkonstante R bei 0°C in Abhängigkeit vom Temperaturdruck p_{O_2} . Die Zeichen sind die gleichen wie in Abb. 3

¹⁴⁾ E. H. Hall, Physic. Rev. (2) 26, 820 (1925).

beabsichtigt war, die Vorbehandlung der Proben bei den vorliegenden Messungen und bei der Meßreihe GS möglichst übereinstimmend auszuführen. Die grund-

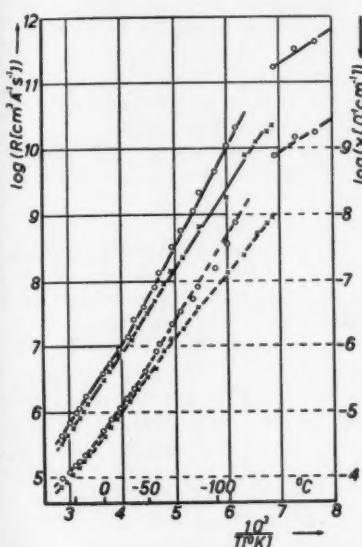


Abb. 5. Hallkonstante R (ausgezogene Kurve) und Leitfähigkeit κ (gestrichelte Kurve) von 2 Proben bei 30 Torr Temperaturdruck in Abhängigkeit von der Temperatur T

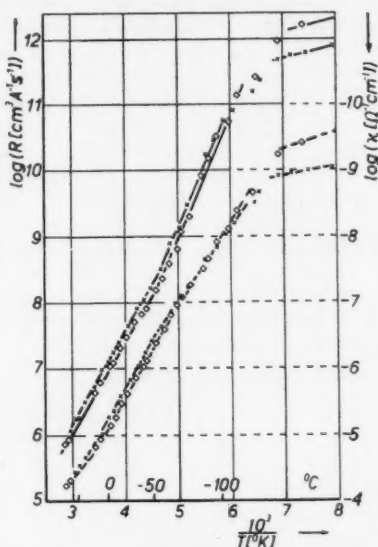


Abb. 7. Hallkonstante R (ausgezogene Kurve) und Leitfähigkeit κ (gestrichelte Kurve) von 2 Proben bei 2 Torr Temperaturdruck in Abhängigkeit von der Temperatur T

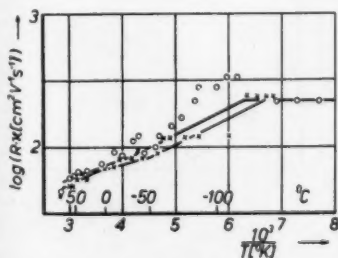


Abb. 6. Produkt $R \cdot \kappa$ der Proben von Abb. 5

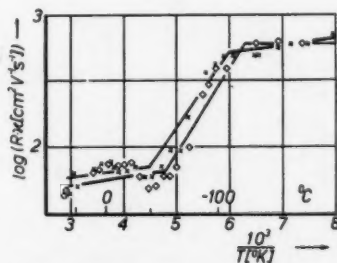


Abb. 8. Produkt $R \cdot \kappa$ der Proben von Abb. 7

sätzliche Richtigkeit des Leitfähigkeitsminimums bei etwa 2 Torr bei der hier angewendeten Vorbehandlung der Kupferoxydulproben ist aber hiermit erneut bestätigt.

Die bei 0°C gemessenen Hallkonstanten in Abhängigkeit vom Sauerstoffdruck der Temperatur zeigt Abb. 4. An der Stelle ihres Maximums hat die Leitfähigkeit, wie zu erwarten, ein Minimum. Über den ganzen Bereich des Sauerstoffdruckes wird ganz eindeutig das positive Vorzeichen der Hallkonstanten festgestellt. Wenn das Hallvorzeichen, wie allgemein angenommen, als ein Kriterium für den Leitungsmechanismus angesehen werden kann, dann ist die Defektelektronenleitung bei jedem Sauerstoffdruck der Temperatur bei tiefer Temperatur hiermit sichergestellt, obwohl bei den hier vorliegenden Untersuchungen wenigstens unterhalb von etwa 2 Torr die Leitfähigkeit mit fallendem Sauerstoffdruck geringer wird.

Das Produkt $R \cdot \kappa$ zeigt bei 0°C Werte, die zwischen 50 und 100 [$\text{Volt}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \text{cm}^2$] liegen; aber eine Abhängigkeit vom Sauerstoffdruck ist bei dieser Temperatur nicht zu erkennen.

b) Abhängigkeit der Leitfähigkeit und der Hallkonstante von der Temperatur bei der Messung

Bei sämtlichen Proben wurden auch die Abhängigkeiten der Leitfähigkeit und der Hallkonstanten von der Temperatur zwischen etwa $+70^\circ\text{C}$ und etwa -150°C gemessen. Nachfolgend sind nur die Ergebnisse von drei Temperaturdrucken, nämlich 30 Torr, 2 Torr und $1 \cdot 10^{-3}$ Torr, zur Abbildung ausgewählt, da hieran alles Wesentliche zu sehen ist und die übrigen Ergebnisse lediglich Zwischenwerte bringen.

In den Abbildungen 5, 7 und 9 sind die Leitfähigkeiten und die Hallkonstanten von Proben dieser drei Temperaturdrücke über der reziproken Temperatur T aufgezeichnet. Man erkennt die schon früher, zuletzt in der

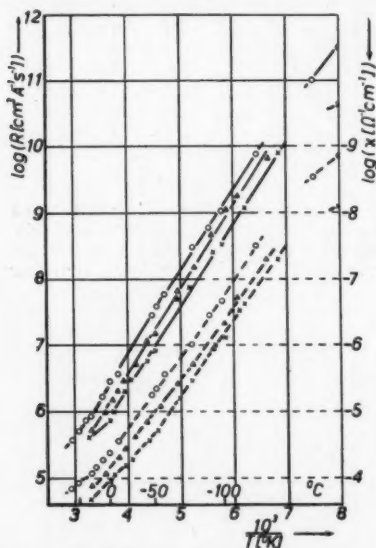


Abb. 9. Hallkonstante R (ausgezogene Kurve) und Leitfähigkeit κ (gestrichelte Kurve) von 3 Proben bei 10^{-3} Torr Temperaturdruck in Abhängigkeit von der Temperatur T

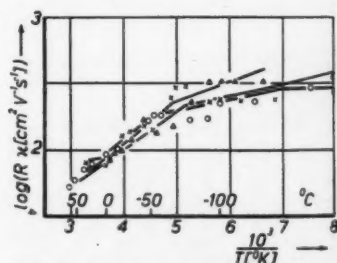


Abb. 10. Produkt $R \cdot \kappa$ der Proben von Abb. 9

VI. Mitteilung⁴⁾ beschriebene Darstellung des Logarithmus der Leitfähigkeit über der reziproken Temperatur durch Polygonzüge. Die Knicke häufen sich an den früher beschriebenen Temperaturwerten, nämlich in der Nähe der Zimmertemperatur, bei

etwa -70°C und bei etwa -140°C . Die in die gleichen Abbildungen mit anderer Ordinate eingetragenen Temperaturabhängigkeiten der Hallkonstanten erweisen sich ebenfalls als Polygonzüge, in denen die Knicke ihrer Lage nach denen der Leitfähigkeitskurven entsprechen. Darstellungen in der Form der Abbildungen 5, 7 und 9 haben bereits W. Vogt³⁾ und E. Engelhard⁴⁾ bei der Mitteilung ihrer Ergebnisse benutzt. Bei diesen erscheint es jedoch so, als hätten die in einer

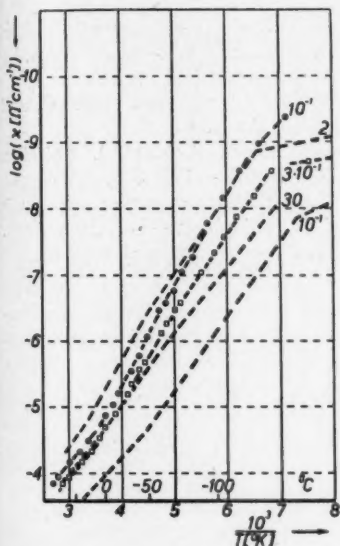


Abb. 11. Leitfähigkeit der gleichen, in Abb. 3 bis 10 mit \times bezeichneten Probe bei verschiedenen Temperatursdrücken in Abb. von der Temperatur. Bereits vorkommende Kurven sind ohne Meßpunkte gezeichnet

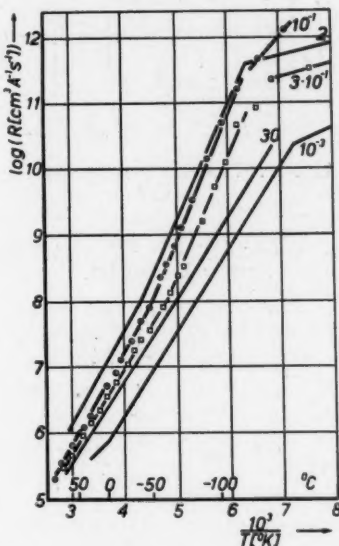


Abb. 12. Hallkonstante R der in Abb. 11 bezeichneten Probe

Leitfähigkeits- und einer Hallkonstantenkurve zueinandergehörenden Knicke auch stets dieselbe Richtung. Wie man aber hier sieht, ist das bei dem Knick bei -70°C nicht immer der Fall. Ferner wurde bei kleinem Temperatursdruck (Abb. 9) beobachtet, daß dieser Knick in der Leitfähigkeitskurve auch die Richtung des Zimmertemperaturknicks haben kann. Wenn die Knicke von zusammengehörigen Leitfähigkeits- und Halleffektskurven nicht genau an demselben Temperaturwert liegen, dann kann das, vor allem bei tiefen Temperaturen, auf verhältnismäßig geringe Meßfehler zurückgeführt werden; denn mit steigendem Widerstand der Probe wächst die Schwierigkeit, eine genaue Halleffektmessung durchzuführen. Hinzu kommt, daß sich Meßfehler in den Abbildungen infolge des nach tiefen Temperaturen ungünstiger werdenden Maßstabes stärker auswirken. In den Abbildungen 6, 8 und 10 sind die Werte für das Produkt $R \cdot \kappa$ über der reziproken Temperatur aufgetragen. Die ausgezogenen Kurven sind aus dem Abstand zu-

sammengehöriger ausgezogener R - und κ -Kurven gewonnen. Obwohl die Einzelwerte beträchtlich streuen, können unter Berücksichtigung der Messungen bei allen Temperungsdrücken folgende qualitative Aussagen gemacht werden:

Bei 30 Torr steigt mit fallender Temperatur das Produkt

$R \cdot \kappa$ zwischen $+50^\circ \text{C}$ und -50°C allmählich an, zwischen -60°C und -100°C steigt es ein wenig steiler, um unterhalb von -110°C wieder flacher zu werden.

Bei 2 Torr ist zwischen $+50^\circ \text{C}$ und -50°C dieses Produkt

einigermaßen konstant¹⁵⁾, zwischen -60°C und -100°C steigt es mit fallender Temperatur sehr steil an und wird unterhalb von -110°C sehr flach.

Abb. 13. Produkt $R \cdot \kappa$ aus Abb. 11 und 12

Bei $1 \cdot 10^{-3}$ Torr wird im ganzen Bereich mit fallender Temperatur ein flacher Anstieg beobachtet.

Diese Abhängigkeit der Gestalt dieser Kurve vom Sauerstoffdruck der Temperung ist auffällig und zeigt bei allen vorliegenden Messungen eine neue Auszeichnung des Sauerstoffdruckes von etwa $p_{O_2} = 2$ Torr.

Die Abbildungen 11, 12 und 13 zeigen κ , R und $R \cdot \kappa$ über $1/T$ an einer einzigen, nacheinander bei fünf verschiedenen Drücken getemperten Probe, und man kann hier nochmals die erwähnten Eigenschaften dieser Abhängigkeiten deutlich erkennen.

e) Abhängigkeit der „Ablösearbeit“ c vom Sauerstoffdruck der Temperung

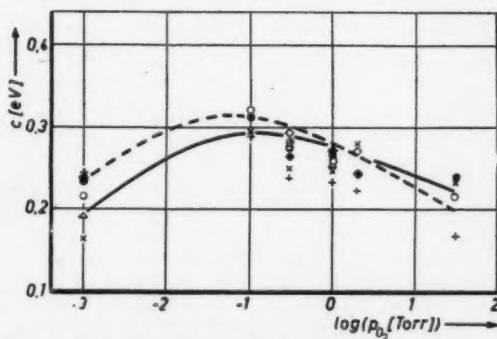


Abb. 14. Ablösearbeit c ermittelt aus den Leitfähigkeitskurven. Zwischen Zimmertemperatur und etwa -60°C sind die gleichen Zeichen wie in Abb. 3 bis 10 benutzt und die Kurve ausgezogen. Zwischen etwa -60° und etwa -130°C sind die Zeichen etwas abgeändert und die Kurve gestrichelt.

— ○ ○ × ◇ △
- - ● ● + ◆ ▲

In der VI. Mitteilung ist über die Möglichkeit gesprochen worden, aus der gemessenen Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit die „Ablösearbeit“ c zu bestimmen. Wenn man bei den hier mitgeteilten Ergebnissen jedes einzelne Geradenstück jedes Polygonzuges für sich betrachtet, erhält man aus den Leitfähigkeitskurven die Abb. 14. Da aber nach Gl. (4) die „Ablösearbeit“ c auch in der Temperatur

¹⁵⁾ Bei -20°C scheint ein Maximum für $R \cdot \kappa$ zu liegen.

abhängigkeit der Hallkonstanten enthalten ist, kann man c auch aus den Meßergebnissen von R gewinnen. Das Resultat zeigt Abb. 15.

Die so aus der Leitfähigkeit und aus der Hallkonstanten ermittelten „Ablösearbeiten“ sind im allgemeinen voneinander verschieden. Um einen Deutungsversuch machen zu können, müßten wohl die Temperaturabhängigkeiten der Freiheitszahl f und der Beweglichkeit v einzeln bekannt sein.

Beide Abbildungen zeigen übereinstimmend, daß ein Maximum der „Ablösearbeit“ zwischen $1 \cdot 10^{-1}$ Torr und 1 Torr vorhanden sein kann. Dieses ist seiner Lage nach anscheinend verschieden von dem Minimum der Leitfähigkeit (Abb. 3) und dem Maximum der Hallkonstanten (Abb. 4). Das bedeutet freilich eine Abweichung von der Meyerschen Regel. In Abb. 16 ist die Ablösearbeit über der Leitfähigkeit aufgetragen, wobei hier keine Gerade entstehen kann, sondern es wird eine Schleife durchlaufen.

5. Diskussion der Ergebnisse

Nach den Meßergebnissen der Leitfähigkeit bei hohen Temperaturen und nach dem Deutungsversuch der V. Mitteilung¹⁶) für die Ergebnisse bei tiefen Temperaturen scheint das Minimum der Leitfähigkeit bei etwa 2 Torr eine Folge der Abkühlungsbedingungen zu sein. Auf der Suche nach Hinweisen, daß der Sauerstoffdruck von 2 Torr auch bei anderen Eigenschaften des Kupferoxyduls eine besondere Rolle spielt, fiel dem Verfasser die Tatsache auf, daß nach H. S. Roberts und F. H. Smyth¹⁷) das Maximum des Schmelzpunktes bei 1235° C im

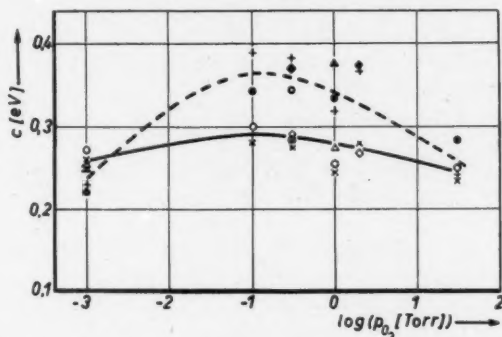


Abb. 15. Ablösearbeit c ermittelt aus den Kurven der Hallkonstanten. Bezeichnung ist die gleiche wie Abb. 14

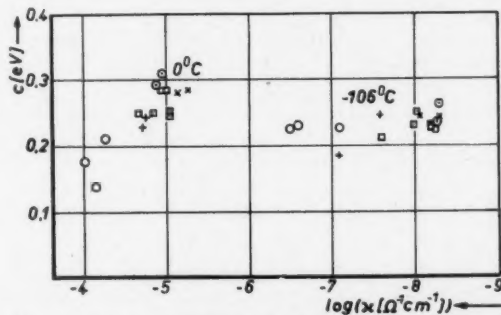


Abb. 16. Meyersche Gerade für die Temperaturen 0° und -106° C, gleiche Zeichen bedeuten Temperatur bei gleichem

Druck: 10^{-3} Torr: ○ 1 Torr: □
 10^{-1} Torr: × 2 Torr: ×
 $3 \cdot 10^{-1}$ Torr: □ 30 Torr: +

¹⁶) G. Blankenburg u. O. Böttger, Ann. Physik (6) **10**, 241 (1952).

¹⁷) H. S. Roberts u. F. H. Smyth, J. Amer. chem. Soc. **43**, 1061 (1921).

Gleichgewicht mit einem Sauerstoffdruck von etwa 2 Torr erreicht wird. Zur Klärung des eventuellen Zusammenhanges der Schmelzpunktsbeobachtung mit der Leitfähigkeitsmessung bedarf es wohl weiterer experimenteller Untersuchungen.

Das Produkt $R \cdot \kappa$ ist nach (10) proportional dem Produkt aus Beweglichkeit und Freiheitszahl. Theoretisch³⁾ erhält man die Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit in der Form

$$v \sim T^{-3/2}. \quad (11)$$

Diese Temperaturabhängigkeit genügt offenbar nicht, um die Meßergebnisse zu deuten. Da aber weder die Beweglichkeit noch die Freiheitszahl für Kupferoxydul einzeln bekannt sind, so lassen sich aus den Halleffektmessungen allein noch keine Aussagen machen.

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. C. Mönch für wertvolle Anleitung und ständige Förderung der Arbeit.

Halle (Saale), II. Physikalisches Institut der Martin-Luther-Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 27. Dezember 1952.)

Eine rotationssymmetrische Lösung in der allgemeinen Relativitätstheorie

Von A. Papapetrou

Inhaltsübersicht

Es wird eine neue exakte rotationssymmetrische Lösung der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie abgeleitet und deren physikalische Bedeutung untersucht.

1. Einleitung

Bekanntlich bestimmt die Schwarzschildsche Lösung der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie das Gravitationsfeld eines ruhenden kugelsymmetrischen Körpers. Das danach interessanteste Problem ist offensichtlich die Bestimmung des Feldes eines Körpers, der nur achsiale Symmetrie besitzt. Weyl¹⁾ hat das statische achsialsymmetrische Problem allgemein diskutiert und seine exakte Lösung angegeben. Das statische²⁾ achsialsymmetrische Problem ist aber physikalisch etwas zu speziell. Man sieht das, wenn man z. B. an die astronomischen Körper denkt: Der Übergang von Kugel- zu Rotationssymmetrie wird erst dann notwendig, wenn sich der Körper um seine Symmetrieachse dreht. Daher wird das physikalisch wichtigere Problem darin bestehen, das stationäre Gravitationsfeld eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Symmetrieachse rotierenden Körpers zu bestimmen.

Die Diskussion des stationären Problems wurde schon frühzeitig in Angriff genommen. Es ist aber noch nicht gelungen, die exakte Lösung des Problems zu finden. Die erste Näherungslösung wurde von Lense und Thirring³⁾ gegeben; diese Autoren haben das stationäre Feld aus der linearen Näherung der Feldgleichungen berechnet. Bach⁴⁾ hat eine Näherungsmethode angegeben, die von dem Schwarzschildschen Feld ausgeht und die Berechnung des Gravitationsfeldes eines rotierenden Körpers einschließlich der in der Drehgeschwindigkeit quadratischen Terme gestattet. Ähnliche Rechnungen wurden auch von Andress⁵⁾ und Akeley⁶⁾ unternommen.

¹⁾ H. Weyl, Ann. Physik **54**, 117 (1917).

²⁾ Wir machen von der üblich gewordenen Vereinbarung Gebrauch, wonach man als statisch ein System ohne Drehimpuls bezeichnet; dagegen wird ein zeitlich unveränderliches, aber mit Drehimpuls versehenes System stationär genannt.

³⁾ J. Lense u. H. Thirring, Physik. Z. **19**, 156 (1918).

⁴⁾ R. Bach, Math. Z. **13**, 119 (1922).

⁵⁾ W. R. Andress, Proc. Roy. Soc. London A **126**, 592 (1930).

⁶⁾ E. Akeley, Philos. Mag. **11**, 322 (1931).

Einige spezielle exakte Lösungen hat Lewis⁷⁾ angegeben. Die einfachste dieser Lösungen beschreibt das Feld eines unendlich langen Zylinders, der gleichförmig mit Masse belegt ist und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine Achse rotiert. In diesem Fall werden die Feldgrößen nur von der Entfernung von der Symmetrieachse abhängen; die Feldgleichungen lassen sich also auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduzieren, deren exakte Lösung leicht gefunden werden kann. Die anderen Lösungen von Lewis hängen von zwei Koordinaten ab; sie entsprechen einer nicht gleichförmigen Massenverteilung, welche sich aber wieder bis ins Unendliche erstreckt. Van Stockum⁸⁾ hat die erste Lewissche Lösung eingehend diskutiert.

In der vorliegenden Arbeit werden wir eine neue exakte Lösung der Feldgleichungen für den stationären Fall ableiten. Es zeigt sich aber, daß auch diese Lösung sehr speziell und physikalisch wenig interessant ist. Wir werden nämlich weiter unten finden, daß diese Lösung das Gravitationsfeld eines Körpers darstellt, der zwar endliche Ausdehnung und einen nicht verschwindenden Drehimpuls, aber eine verschwindende Gesamtmasse besitzt.

2. Die Feldgleichungen

Die Feldgleichungen für den stationären rotationssymmetrischen Fall werden wir unmittelbar aus der Arbeit von Lewis⁷⁾ entnehmen. Das Linienelement hat die Form

$$ds^2 = -e^\mu (d\rho^2 + dz^2) - l d\varphi^2 - 2m d\varphi dt + f dt^2; \quad (2,1)$$

ρ , z und φ sind zylindrische Koordinaten. Die Größen μ , l , m und f hängen nur von ρ und z ab. Die Feldgleichungen sind

$$\nabla^2 \mu = \frac{1}{2\rho^2} (f_\rho l_\rho + f_z l_z + m_\rho^2 + m_z^2), \quad (2,2)$$

$$\mu_\rho = -\frac{1}{2\rho} (f_\rho l_\rho - f_z l_z + m_\rho^2 - m_z^2); \quad (2,2a)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 f - \frac{1}{\rho} f_\rho &= -\frac{f}{\rho^2} (f_\rho l_\rho + f_z l_z + m_\rho^2 + m_z^2), \\ \nabla^2 l - \frac{1}{\rho} l_\rho &= -\frac{l}{\rho^2} (f_\rho l_\rho + f_z l_z + m_\rho^2 + m_z^2), \\ \nabla^2 m - \frac{1}{\rho} m_\rho &= -\frac{m}{\rho^2} (f_\rho l_\rho + f_z l_z + m_\rho^2 + m_z^2). \end{aligned} \right\} \quad (2,3)$$

Dabei bedeutet der Index ρ oder z Ableitung nach ρ oder z ; ferner ist $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Zur Lösung dieser Gleichungen betrachten wir zunächst das System der drei Gleichungen (2,3). Nur zwei dieser Gleichungen sind voneinander unabhängig, da wegen der Einführung der „kanonischen Koordinaten“ nur zwei von den drei Größen f, l, m voneinander unabhängig sind. Es zeigt sich nämlich, daß diese drei Größen durch folgende Beziehung verbunden sind:

$$f l + m^2 = \rho^2. \quad (2,4)$$

⁷⁾ T. Lewis, Proc. Roy. Soc. London A **136**, 176 (1932).

⁸⁾ W. J. van Stockum, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **57**, 135 (1937).

Für $r = \sqrt{\varrho^2 + z^2} \rightarrow \infty$ müssen die Größen f , l , m asymptotisch gegen folgende Werte streben:

$$f \rightarrow 1, \quad l \rightarrow \varrho^2, \quad m \rightarrow \frac{\lambda \varrho^2}{r^2}; \quad (2,5)$$

dabei ist λ dem Drehimpuls des Körpers proportional.

Wenn f , l , m aus den Gln. (2,3) berechnet worden sind, wird man die übrigen Gln. (2,2) und (2,2a) zur Bestimmung von μ benutzen. Man findet nämlich, daß Gl. (2,2) durch folgende Gleichung ersetzt werden kann

$$\mu_z = -\frac{1}{2\varrho} (f_e l_z + f_z l_e + 2 m_e m_z). \quad (2,2b)$$

Es ist leicht nachzuweisen, daß die Verträglichkeit von (2,2a) und (2,2b) schon durch Gl. (2,3) gesichert ist. Die Größe μ wird also aus (2,2a) und (2,2b) durch unmittelbare Integration ermittelt.

Zur Ableitung unserer Lösung müssen wir zunächst die drei Größen f , l , m durch zwei neue, v und w , ausdrücken:

$$f = \frac{1}{v}, \quad l = \varrho^2 v - \frac{w^2}{v}, \quad m = \frac{w}{v}. \quad (2,6)$$

Die drei Gleichungen (2,3) reduzieren sich dann auf die folgenden beiden unabhängigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} v \left(V^2 v + \frac{1}{\varrho} v_e \right) - (v_e^2 + v_z^2) - \frac{1}{\varrho^2} (w_e^2 + w_z^2) &= 0, \\ v \left(V^2 w - \frac{1}{\varrho} w_e \right) - 2 (v_e w_e + v_z w_z) &= 0. \end{aligned} \quad (2,7)$$

Die Randbedingungen für v und w ergeben sich aus (2,5) und (2,6):

$$v \rightarrow 1, \quad w \rightarrow \frac{\lambda \varrho^2}{r^2}. \quad (2,8)$$

3. Bestimmung von v

Die neue Lösung ergibt sich, wenn wir v und w der folgenden zusätzlichen Bedingung unterwerfen:

$$v_e w_e + v_z w_z = 0. \quad (3,1)$$

Wir können (3,1) auch in der Form

$$v_z = \xi w_e, \quad v_e = -\xi w_z \quad (3,1a)$$

schreiben. Es folgt dann

$$\xi V^2 w + \xi_e w_e + \xi_z w_z = 0.$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der zweiten der Gleichungen (2,7), welche nun die Form

$$V^2 w - \frac{1}{\varrho} w_e = 0$$

annimmt, so finden wir

$$\xi_e w_e + \xi_z w_z + \frac{1}{\varrho} \xi w_e = \xi w_e (\lg \varrho \xi)_e + \xi w_z (\lg \varrho \xi)_z = 0.$$

Oder, wenn wir (3,1a) nochmals benutzen,

$$(\lg \varrho \xi)_e v_z - (\lg \varrho \xi)_z v_e = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet, daß $\varrho \xi$ nur von v abhängt:

$$\xi = \frac{1}{\varrho} \Phi(v). \quad (3,2)$$

Aus (3,1a) finden wir weiter

$$V^2 v = \xi_z w_\varrho - \xi_\varrho w_z = \frac{1}{\xi} (\xi_\varrho v_\varrho + \xi_z v_z).$$

Und wenn wir (3,2) berücksichtigen,

$$V^2 v + \frac{1}{\varrho} v_\varrho - \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv} (v_\varrho^2 + v_z^2) = 0. \quad (3,3)$$

Andererseits finden wir, wenn wir (3,1a) in die erste der Gleichungen (2,7) einführen,

$$v \left(V^2 v + \frac{1}{\varrho} v_\varrho \right) - \left(1 + \frac{1}{\varphi^2} \right) (v_\varrho^2 + v_z^2) = 0. \quad (3,4)$$

Der Vergleich von (3,3) und (3,4) ergibt eine Gleichung für Φ :

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv} = \frac{1}{v} \left(1 + \frac{1}{\varphi^2} \right).$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\Phi^2 + 1 = \alpha^2 v^2, \quad (3,5)$$

wo α eine Integrationskonstante bedeutet.

Durch Einführung von (3,5) in (3,4) ergibt sich eine Gleichung für v :

$$V^2 v + \frac{1}{\varrho} v_\varrho - \frac{\alpha^2 v}{\alpha^2 v^2 - 1} (v_\varrho^2 + v_z^2) = 0. \quad (3,6)$$

Diese Gleichung kann man auf die Laplacesche Gleichung reduzieren. Ist nämlich φ eine Funktion von v , so findet man unmittelbar

$$V^2 \varphi + \frac{1}{\varrho} \varphi_\varrho = \frac{d\varphi}{dv} \left(V^2 v + \frac{1}{\varrho} v_\varrho \right) + \frac{d^2 \varphi}{dv^2} (v_\varrho^2 + v_z^2). \quad (3,7)$$

Man sieht jetzt, daß (3,6) auf die Laplacesche Gleichung

$$V^2 \varphi + \frac{1}{\varrho} \varphi_\varrho = 0 \quad (3,8)$$

reduziert wird, wenn φ so gewählt wird, daß

$$\frac{d^2 \varphi}{dv^2} = - \frac{d\varphi}{dv} \frac{\alpha^2 v}{\alpha^2 v^2 - 1}. \quad (3,9)$$

Die Lösung von (3,9) ist

$$\varphi = \frac{\beta^2}{\alpha} \lg(\alpha v + \sqrt{\alpha^2 v^2 - 1}) + \gamma, \quad (3,10a)$$

wobei β und γ zwei weitere Integrationskonstanten bedeuten. Man kann (3,10a) nach v auflösen. Das Ergebnis ist

$$v = \alpha' \cosh(\gamma' \varphi) + \beta' \sinh(\gamma' \varphi), \quad (3,10b)$$

wo α' , β' , γ' drei Funktionen von α , β , γ , d. h. drei neue Konstante sind. Die Konstante γ' kann man sofort weglassen, da mit φ auch $\gamma' \varphi$ eine Lösung der Laplaceschen Gleichung ist. Man könnte auch die Konstante β' weglassen, weil $\alpha' \cosh \varphi + \beta' \sinh \varphi = \alpha'' \cosh(\varphi + \beta'')$. Damit würde man aber die Lösung

$v = \alpha' (\cosh \psi + \sinh \psi)$, welche dem Grenzfall $\beta'' \rightarrow \infty$, $\alpha'' \rightarrow 0$ entspricht, ausschließen. Wir setzen daher

$$v = \alpha \cosh \psi + \beta \sinh \psi, \quad (3,10)$$

indem wir schließlich α und β an Stelle von α' und β' schreiben.

Für die Berechnung von w muß man Φ als Funktion von ψ ausdrücken. Dabei darf man nicht unmittelbar (3,5) verwenden, da die Konstante α in (3,10) von der in (3,5) mit α bezeichneten Konstanten verschieden ist. Am einfachsten wird man in (3,7) ψ und v vertauschen:

$$V^2 v + \frac{1}{\varrho} v_e = \frac{dv}{d\psi} \left(V^2 \psi + \frac{1}{\varrho} \psi_e \right) + \frac{d^2 v}{d\psi^2} (\psi_e^2 + \psi_z^2).$$

Berücksichtigt man noch (3,8) und vergleicht mit (3,4), so ergibt sich

$$\frac{1 + \Phi^2}{v \Phi^2} \left(\frac{dv}{d\psi} \right)^2 = \frac{d^2 v}{d\psi^2},$$

und dann schließlich:

$$\Phi = \varrho \xi = \frac{1}{\pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{dv}{d\psi}. \quad (3,11)$$

4. Bestimmung von w und μ

Zur Berechnung von w gehen wir von (3,1a) aus. Mit Hilfe von (3,2) und (3,11) finden wir

$$\begin{aligned} w_e &= \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \varrho \psi_z, \\ w_z &= \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \varrho \psi_e. \end{aligned} \quad (4,1)$$

Nun kann man leicht nachweisen, daß es immer möglich ist, eine neue harmonische Funktion χ ,

$$V^2 \chi + \frac{1}{\varrho} \chi_e = 0, \quad (4,2)$$

zu finden, so daß

$$\psi = \chi_z. \quad (4,3)$$

Die Gleichungen (4,1) nehmen dann die Form

$$\begin{aligned} w_e &= \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cdot (\varrho \chi_e)_e, \\ w_z &= \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cdot (\varrho \chi_e)_z. \end{aligned} \quad (4,1a)$$

Daher

$$w = \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \varrho \chi_e + \gamma. \quad (4,4a)$$

Die dabei auftretende Integrationskonstante γ ist unwesentlich. Man bemerkt nämlich, daß $\lg \varrho$ eine harmonische Funktion ist; man kann also χ durch $\chi - \frac{\gamma \lg \varrho}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$ ersetzen, wodurch die Konstante γ aus der Formel verschwindet.

Ferner kann man auch das Vorzeichen \pm in χ absorbieren. Man darf also schließlich schreiben

$$w = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \varrho \chi_e. \quad (4,4)$$

Gleichungen (3,10), (4,3) und (4,4) bestimmen eine Lösung von (2,7), die von einer willkürlichen harmonischen Funktion χ abhängt. Nach (2,6) ergeben sich für

f , l und m die Formeln

$$\left. \begin{aligned} f &= (\alpha \cosh \chi_z + \beta \sinh \chi_z)^{-1}, \\ l &= \varrho^2 \left[\frac{1}{f} - (\alpha^2 - \beta^2) f \chi_z^2 \right], \\ m &= \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cdot f \varrho \chi_z. \end{aligned} \right\} \quad (4,5)$$

Zur Berechnung von μ führen wir (2,6) in (2,2a) und (2,2b) ein:

$$\begin{aligned} (\mu - \lg v)_e &= \frac{1}{2 \varrho v^2} [\varrho^2 (v_e^2 - v_z^2) - (w_e^2 - w_z^2)], \\ (\mu - \lg v)_z &= \frac{1}{\varrho v^2} (\varrho^2 v_e v_z - w_e w_z). \end{aligned} \quad (4,6)$$

Beachten wir noch die Ausdrücke (3,10) und (4,4) für v und w , so finden wir schließlich

$$\begin{aligned} (\mu - \lg v)_e &= \frac{1}{2} \varrho (\psi_e^2 - \psi_z^2), \\ (\mu - \lg v)_z &= \varrho \psi_e \psi_z. \end{aligned} \quad (4,7)$$

Daraus wird man die Größe $\mu - \lg v$ unmittelbar durch Integration gewinnen⁹⁾. Man bemerke noch, daß die rechten Seiten von (4,7) nur die Funktion ψ enthalten, und deshalb mit den in der Weylschen Lösung des statischen Problems eintretenden Ausdrücken genau übereinstimmen¹⁰⁾. Die Integration von (4,7) wird sich also genau so wie bei der Weylschen Lösung gestalten.

5. Die Randbedingungen

Die erste der Bedingungen (2,5),

$$f \rightarrow 1 \quad \text{für } r \rightarrow \infty,$$

wird erfüllt, wenn man χ so wählt, daß

$$\chi_z \rightarrow \text{const} \equiv A;$$

dabei müssen die Konstante α , β folgende Beziehung erfüllen:

$$\alpha \cosh A + \beta \sinh A = 1.$$

Die Bedingung $m \rightarrow \frac{\lambda \varrho^2}{r^2}$ ist mit

$$\chi_e \rightarrow \frac{\lambda' \varrho}{r^2}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}},$$

gleichwertig. Die dritte Bedingung $l \rightarrow \varrho^2$ ist von selbst erfüllt, wenn die zwei ersten schon erfüllt sind.

Aus den obigen zwei Bedingungen ersehen wir gleich, daß χ folgende Form haben muß¹¹⁾:

$$\chi = A z - \frac{\lambda'}{r} + \dots; \quad (5,1)$$

die nicht ausgeschriebenen Terme stellen willkürliche höhere Multipole dar.

⁹⁾ Die Bedingung für die Verträglichkeit von (4,7) ist durch (3,8) gegeben, d. h. bei harmonischem ψ automatisch erfüllt.

¹⁰⁾ Die Formeln für die Weylsche Lösung ergeben sich aus (4,5), wenn man darin $\alpha = \beta = 1$ setzt.

¹¹⁾ Ein konstanter Term in χ ist offensichtlich für (4,5) unwesentlich.

Es bleibt noch die Aufgabe, die durch eine Funktion χ der Form (5,1) erzeugte Lösung (4,5) physikalisch zu deuten. Man findet aus (5,1)

$$\chi_z = A + \frac{\lambda' z}{r^3} + \dots$$

Nach der ersten Gl. (4,5) wird also die Größe $f - 1$ mit einem Term anfangen, der zu $\frac{z}{r^3}$ proportional ist; und es gibt keinen zu $\frac{1}{r}$ proportionalen Term. Da der Koeffizient dieses fehlenden Terms der Masse des das Gravitationsfeld erzeugenden Körpers proportional ist, müssen wir daraus schließen, daß die gefundene Lösung einem Körper von verschwindender Masse entspricht.

Versucht man in $f - 1$ einen zu $\frac{1}{r}$ proportionalen Term einzuführen, so wird dies nur dadurch möglich, daß man in χ einen zu $\lg(z + r)$ proportionalen Term hinzufügt¹²⁾. Dann erhält aber χ_e einen zu $\frac{e}{r(z + r)}$ proportionalen Term; deshalb wird die Erfüllung der Randbedingung für m nur dadurch möglich, daß man $\alpha = \beta$ annimmt, d. h. den Drehimpuls gleich Null setzt. Die Lösung (4,5) bestimmt also das Feld eines Körpers, für den entweder nur die Masse oder nur der Drehimpuls von Null verschieden ist. Das Feld eines Körpers mit nicht verschwindender Masse und Drehimpuls ist in (4,5) nicht enthalten: Dieses Feld wird einer allgemeineren Lösung der Gln. (2,7) entsprechen, bei welcher die zuzätzliche Bedingung (3,1) nicht erfüllt ist.

¹²⁾ Wie man leicht nachprüft, ist $\lg(z + r)$ eine harmonische Funktion.

Berlin, Deutsche Akademie der Wissenschaften.

(Bei der Redaktion eingegangen am 20. November 1952.)

Viscosity as a Factor in the Anomalous Absorption of Ultrasonic Waves in Liquids

By S. Parthasarathy and A. F. Chhapgar

(With 8 figures)

Inhaltsübersicht

Um die anomale Absorption von Ultraschallwellen zu erklären, wird eine Voraussetzung eingeführt, daß ein zusätzlicher Koeffizient der Kompressions-Viskosität existiert neben dem üblichen der reinen Viskosität. Dieser Koeffizient wurde von verschiedenen Autoren sowohl theoretisch als auch experimentell bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wurde eine andere Methode angewandt, um die Richtigkeit der Vorstellung zu verifizieren. Aus den piezoelektrischen Strömen, die von den gedämpften Schwingungen eines in verschiedenen Flüssigkeiten schwingenden Quarzkristalls herrühren, wurde der Q -Faktor des Quarzes bestimmt und in Zusammenhang gebracht mit der reinen Viskosität des Mediums. Die Existenz der geforderten zweiten Viskosität wird durch die Ergebnisse nicht bestätigt.

Introduction

It is well-known that the observed absorption of ultrasonic waves in liquids does not agree with the values calculated from the Stokes-Kirchoff theory. Several explanations have been offered by various workers to account for this anomaly. One among these assumes that the viscosity of liquids as ordinarily measured might differ from that which would be effective at the high frequencies encountered in the case of ultrasonic propagation. Thus, by assuming a structural mechanism of absorption (particularly for associated liquids like water and alcohol), which implies the existence of an isothermal coefficient of bulk viscosity, Hall¹⁾ has theoretically calculated the coefficient of bulk viscosity for water. Fox and Rock²⁾ assuming the existence of a compressional viscosity as given by Tisza³⁾, have also calculated from their measurements of absorption this coefficient of water, although their values are not the same as given by Hall. Based on Eckart's⁴⁾ theory of the acoustical streaming of liquids, Liebermann⁵⁾ has calculated the value of the second viscosity of several liquids, but he finds no relation between the two viscosities. Mason⁶⁾ 7) 8) by using a different technique has measured the

¹⁾ L. Hall, *Physic. Rev.* **73**, 775 (1948).

²⁾ F. E. Fox and G. D. Rock, *Physic. Rev.* **70**, 68 (1946).

³⁾ L. Tisza, *Physic. Rev.* **61**, 531 (1942).

⁴⁾ C. Eckart, *Physic. Rev.* **73**, 68 (1948).

⁵⁾ L. N. Liebermann, *Physic. Rev.* **74**, 1415 (1949).

⁶⁾ W. P. Mason, *Proc. A. S. M. E.* May 1947.

⁷⁾ W. P. Mason, W. C. Baker, H. J. McSkimin and J. H. Heiss, *Physic. Rev.* **73**, 1074 (1948).

⁸⁾ W. P. Mason, W. C. Baker, H. J. McSkimin and J. H. Heiss, *Physic. Rev.* **75**, 936 (1949).

viscosities of different liquids. The viscosities of ordinary organic liquids agree, within 1%, with the values derived from static measurements; but, from the results obtained by him in the case of long chain polymers, it has been inferred that, in addition to the primary shear viscosity which is relaxed at lower frequencies, there exist secondary components of viscosity which relax at higher frequencies and thus account for the anomalous absorption. But in the absence of absorption data by other methods, it is difficult to corroborate these results. Recently Lu ⁹) has also calculated the coefficient of bulk viscosities for various liquids from theoretical considerations, but his results bear no comparison to those of Liebermann.

Since none of these results agree with each other, except in the basic assumption, it is necessary to arrive at the same results by other, preferably independent, methods. The present investigation was therefore taken up to verify the assumption of the concept of compressional viscosity.

When a quartz crystal is set into forced oscillations at one of its resonant frequencies, it can be represented by an equivalent circuit, as shown in fig. 1, where C_1 is the static capacity of the crystal electrodes, C_0 is the stiffness of the crystal (transformed into electrical terms), L is the effective mass of the crystal (also transformed into electrical terms) while R represents the losses in the crystal due to internal friction and due to the radiation of energy to the surrounding medium. By immersing the crystal in different liquids, the radiation resistance which mainly constitutes R , increases with increasing viscosity. Thus $Q \left(= \frac{2\pi f L}{R} \right)$ should normally decrease

with increasing shear viscosity. However, for those liquids which show an anomalous absorption and for which therefore the compressional viscosity is assumed to be very high, the value of Q should decrease considerably. A plot of Q against shear viscosity should therefore show dips for those liquids which behave abnormally towards absorption through the mechanism of compressional viscosity.

Experimental

The method adopted for measuring Q was similar to that used by Brown ¹⁰), in which the current due to the damped vibrations of the quartz crystal are recorded on a cathode-ray oscillograph. The lay-out is shown in fig. 2.

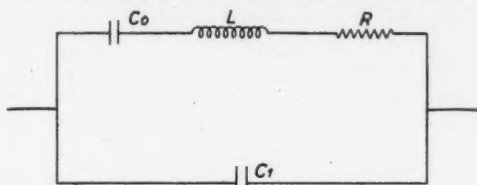


Fig. 1

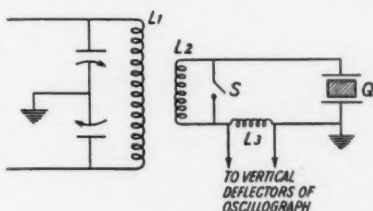


Fig. 2

⁹) H. Lu, J. Acoust. Soc. Amer. **23**-1, 12 (1951).

¹⁰) H. A. Brown, Proc. I. R. E. **29**, 195 (1941).

The quartz Q is excited to resonance by a 25-watt oscillator whose tank coil L_1 is loosely coupled to the pick-up coil L_2 . A small inductance L_3 is kept in series with L_2 , and the potential drop across it, due to the resonator current in the circuit, is fed into the oscillograph. A switch S is used for periodically short-circuiting the coil L_2 . With the switch S in the open position a fixed-amplitude

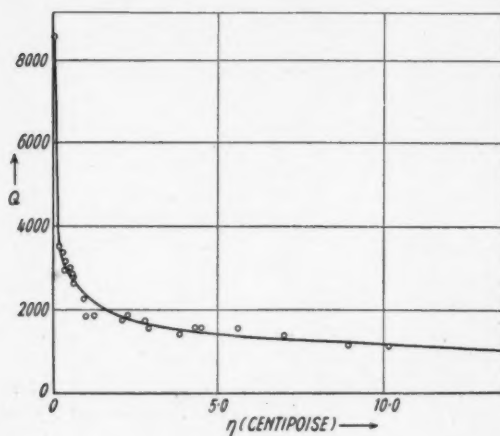


Fig. 3

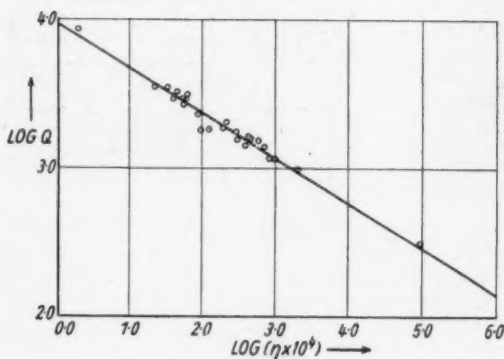


Fig. 4

which was about 20°C . The liquids were used in a large range of viscosities, with air and castor oil forming the extreme cases. The results of the experiment are given in table I.

current flows in the resonator circuit and forms a rectangular pattern on the screen of the oscillograph. When the switch S is closed, the coil L_2 is shorted and the current due to the damped vibrations of the quartz gives a corresponding damped pattern on the screen, in which the amplitude of deflection is proportional to the damped current and hence to the amplitude of mechanical vibration of the quartz. The pattern was photographed on an oscillograph camera. From a measurement of the damped pattern, the logarithmic decrement δ and hence Q , can be calculated. A similar arrangement has been described by Bosshard and Busch¹¹⁾.

The crystal used in the present series had a fundamental frequency of 3.27 MC and was plated uniformly on both sides. The measurements were carried out at the fundamental frequency only. The liquids were used at the room temperature,

¹¹⁾ W. Bosshard and G. Busch, Z. Physik 108, 195 (1938).

Table 1

Liquids	Viscosities (centipoise)	Q	Liquids	Viscosities (centipoise)	Q
Air	0.018	8540	Iso-propyl alcohol .	2.20	1930
Ethyl ether	0.22	3520	Butyl alcohol . . .	2.80	1700
Acetone	0.31	3400	Methyl salicylate .	2.86	1550
Carbon disulphide .	0.37	2930	Iso-amyl alcohol . .	3.86	1420
Ethyl acetate	0.44	3170	Aniline	4.43	1550
Chloroform	0.56	2670	Amyl alcohol	4.54	1540
Toluene	0.58	2770	Benzyl alcohol . . .	5.58	1520
Xylene	0.60	2810	Capryl alcohol . . .	7.01	1330
Benzene	0.65	2980	Octyl alcohol	8.92	1120
Amyl acetate	0.89	2280	Diethyl phthalate .	10.10	1130
Carbon tetrachloride	0.95	1840	Ethylene glycol . .	17.40	990
Ethyl alcohol	1.19	1860	Castor oil	986	300
Nitrobenzene	2.01	1800			

Discussion

The above results show a striking effect. The values of Q decrease regularly with increasing viscosity. This is very strikingly demonstrated by the graphs in fig. 3 and 4, where all the points lie on the lines. The relation between Q and η

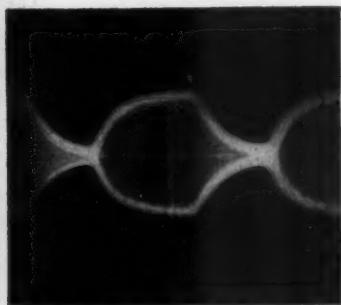


Fig. 5. Shows the damped vibration pattern of quartz in air

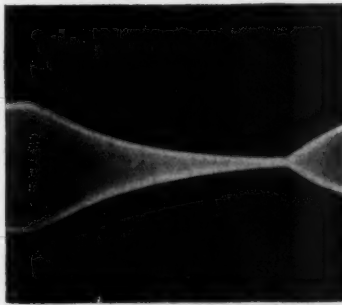


Fig. 6. Shows the same, with a higher sweep speed of the cathode ray beam

can be expressed by the relation $Q\eta^k = c$, where k and C are constants having values $k = 0.30$ and $C = 2300$, in the units used. Thus, for the crystal used in the present experiment, Q is proportional to η^{-1} , and since Q is also proportional to $\frac{1}{R}$, we get the relation $R \propto \eta^{\frac{1}{2}}$.

Further, it is seen that the values of Q for all liquids, those with normal absorption as well as others with anomalous absorption, fall on the smooth curves. Even the highly absorbing liquids like carbon disulphide and benzene, for which very high values of the compressional viscosity have been attributed by other workers, do not show any marked deviation from normality as would be expected in the case of a high compressional viscosity. This result would therefore suggest the absence of any compressional viscosity, at least in the ordinary liquids, and at

the frequency used, and we must therefore look elsewhere for the causes of abnormal absorption.

It will not be out of place here to mention other experimental evidence against the postulation of second viscosity. The results¹²⁾ of the anomalous dipolar dispersion and absorption in liquids show no change of viscosity with frequency in the



Fig. 7. Shows the pattern in a liquid. The higher damping, compared to 2, is evident

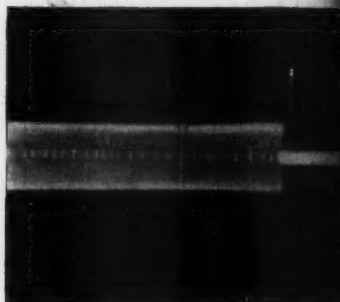


Fig. 8. Shows the pattern in a highly viscous liquid. The oscillations are damped almost instantly

region of 10^8 cycles/sec. Further, the postulation of second viscosity, which is a relaxation phenomenon, implies a dispersion of velocity. This dispersion has not been conclusively confirmed in spite of careful investigation by several workers.

Further work on this problem is being continued.

¹²⁾ J. Errera, Trans. Faraday Soc. **33**, 120 (1937).

New Delhi, National Physical Laboratory of India.

(Bei der Redaktion eingegangen am 31. Dezember 1952.)

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Mögliche, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74; für den Anzeigenteil: VEB Georg Thieme, Anzeigenabteilung, Leipzig C 1, Thomaskirchhof 21, Ruf 36233). Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste Nr. 3; Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Fernruf: 63 105, 63 781. Veröffentlicht unter der Lizenznummer 285/1954 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik
Printed in Germany Druck: Paul Dünhaupt, Köthen (IV/5/1) L 69/53

es of al

e against
olar dis-
ey in the

highly
ons are

ch is a
as not
orkers.

g 74;
of 21,
g C 1,
5/1264

69/53